

DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-35-43

УДК [517.954:517.956.225]:514.113.5

ББК [В161.6:В171.4]:В151.0

А.А. АФАНАСЬЕВ, Н.Н. ИВАНОВА

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа, уравнение Лапласа, прямоугольный параллелепипед, постоянные Фурье.

Цель исследования – решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде методом разделения переменных и оценка полученных при этом постоянных разделения переменных Фурье.

Материалы и методы. Для решения краевой задачи для уравнения Лапласа использовались методы математической физики. Исходная задача была разбита на три стандартные, в которых неоднородные граничные условия заданы только на двух параллельных сторонах, а на остальной части они принимались равными 0.

Результаты исследования. Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде была разбита на три задачи. Получены частные решения этих задач при заданных граничных условиях. Произведена оценка постоянных разделения переменных Фурье.

Выводы. Решение уравнения Лапласа для параллелепипеда является суммой решений трёх частных задач. Граничные функции параллелепипеда являются нечётными периодическими по двум переменным функциями, периоды которых равны длинам соответствующих сторон параллелепипеда. Постоянные Фурье частных решений задачи являются коэффициентами разложения граничных периодических функций двух переменных в тригонометрический ряд Фурье. В двумерных рядах решения уравнения Лапласа для нечётных и для совокупности одновременно чётных и нечётных гармоник постоянные Фурье отличаются только знаками.

При исследовании реальных технологических процессов и явлений природы методами математического моделирования важным этапом является построение математической модели [9, 10]. Широкий класс математических моделей представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа, к которым относится и уравнение Лапласа [1, 2, 8, 9, 15, 16].

Цель исследования – решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде методом разделения переменных и оценка полученных при этом постоянных Фурье.

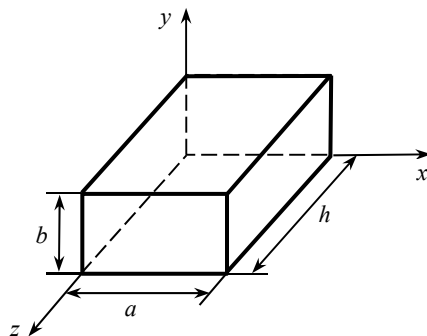
Материалы и методы. Для решения краевой задачи для уравнения Лапласа использовались методы математической физики и математического анализа [3–6, 12, 13]. Исходная задача была разбита на три стандартные, в которых неоднородные граничные условия заданы только на двух параллельных сторонах, а на остальной части они принимались равными 0.

Результаты исследования. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде (рисунок)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < h, \quad (1)$$

будем искать при следующих граничных условиях [3–6, 12, 13]:

$$\begin{cases} u(x=0) = \varphi_1(y, z), u(x=a) = \varphi_2(y, z), \\ u(y=0) = \psi_1(x, z), u(y=b) = \psi_2(x, z), \\ u(z=0) = \gamma_1(x, y), u(z=h) = \gamma_2(x, y). \end{cases} \quad (2)$$



Прямоугольный параллелепипед

Исходную задачу разобьем на три задачи [14]. В первой задаче уравнение Лапласа (1) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= 0, u(x=a) = 0, \\ u(y=0) &= 0, u(y=b) = 0, \\ u(z=0) &= \gamma_1(x, y), u(z=h) = \gamma_2(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Частное решение (1) при граничных условиях (3) будем искать в виде

$$u(x, y, z) = \vartheta(x, y)Z(z). \quad (4)$$

После подстановки (4) в уравнение Лапласа (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_2 \vartheta(x, y) + \lambda \vartheta(x, y) &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(x=0) &= 0, \quad u(x=a) = 0, \quad u(y=0) = 0, \quad u(y=b) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$d^2 Z(z)/dz^2 - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h, \quad (6)$$

где λ – постоянная разделения переменных.

Дифференциальное уравнение (5) является задачей Штурма–Лиувилля для прямоугольника. Для нахождения собственных функций и собственных значений ненулевые решения этой задачи запишем в виде

$$\vartheta(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0,$$

подставляя которые в (5), получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu.$$

Из этого выражения находим два обыкновенных дифференциальных уравнения с нулевыми начальными значениями для неизвестных функций $X(x)$ и $Y(y)$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0; \quad Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \quad (7)$$

где $\nu = \lambda - \mu$.

Из уравнений (7) следуют выражения для собственных функций и собственного значения задачи Штурма–Лиувилля для прямоугольника

$$\vartheta_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y;$$

$$\lambda_{nm}^1 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2.$$

Дифференциальное уравнение (6) имеет решение

$$Z(z) = A \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} h} + B \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} h},$$

где

$$\lambda = \lambda_{nm}^1 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2;$$

$A, B = \text{const}$.

Частное решение первой задачи находится в виде

$$u_{nm}(x, y, z) = \vartheta_{nm}(x, y) \left[A_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} + B_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} \right].$$

Таким образом, решение первой задачи представляется в виде разложения по построенным частным решениям

$$u_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \left[A_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} + B_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} \right]. \quad (8)$$

Постоянные Фурье A_{nm}, B_{nm} в (8) определяются из граничных условий (3):

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \gamma_2(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \, dx dy; \\ B_{nm} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \gamma_1(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \, dx dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, во-первых, что граничные функции $\gamma_1(x, y)$ и $\gamma_2(x, y)$ являются нечётными периодическими (по x с периодом a , по y с периодом b) функциями, во-вторых, постоянные Фурье A_{nm} и B_{nm} являются коэффициентами разложения этих периодических функций двух переменных в тригонометрический ряд Фурье [7].

Во второй задаче уравнение Лапласа (1) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= 0, \quad u(x=a) = 0, \\ u(y=0) &= \psi_1(x, z), \quad u(y=b) = \psi_2(x, z), \\ u(z=0) &= 0, \quad u(z=h) = 0. \end{aligned}$$

Выполняя действия, аналогичные тем, которые были произведены при решении первой задачи, для второй задачи получим

$$u_2(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{nm}^2 &= \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2, \\ C_{nm} &= \frac{4}{ah} \int_0^a \int_0^h \psi_2(x, z) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \, dx dz; \\ D_{nm} &= \frac{4}{ah} \int_0^a \int_0^h \psi_1(x, z) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \, dx dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализируя выражения (11), отметим, во-первых, что граничные функции $\psi_1(x, z)$ и $\psi_2(x, z)$ являются нечётными периодическими (по x с периодом a и по z с периодом h), во-вторых, постоянные Фурье C_{nm} и D_{nm} являются коэффициентами разложения этих периодических функций двух переменных в тригонометрический ряд Фурье [7].

В третьей задаче уравнение Лапласа (1) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= \varphi_1(y, z), \quad u(x=a) = \varphi_1(y, z), \\ u(y=0) &= 0, \quad u(y=b) = 0, \\ u(z=0) &= 0, \quad u(z=h) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи получено в виде

$$u_3(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{h} z \left[E_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} + F_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} \right], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{nm}^3 &= \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2, \\ E_{nm} &= \frac{4}{bh} \int_0^b \int_0^h \varphi_2(y, z) \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{h} z \, dy dz; \\ F_{nm} &= \frac{4}{bh} \int_0^b \int_0^h \varphi_1(y, z) \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{h} z \, dy dz. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что, во-первых, что граничные функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ являются нечётными, периодическими (по y с периодом b и по z с периодом h), во-вторых, постоянные Фурье E_{nm} и F_{nm} являются коэффициентами разложения этих периодических функций двух переменных в тригонометрический ряд Фурье [7].

Полное решение $u(x, y, z)$ задачи (1) при краевых условиях (2) равно сумме частных решений (8), (10) и (12) трех рассмотренных задач:

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z). \quad (14)$$

С точки зрения расчёта электромеханических устройств, в которых источники магнитного поля располагаются снизу и сверху, интерес представляет второе решение $u_2(x, y, z)$ [1, 2, 7, 11].

Дифференцируя уравнение (14) по переменным x , y и z , можем получить выражения для составляющих магнитной индукции $B_x(x, y, z)$, $B_y(x, y, z)$ и $B_z(x, y, z)$

$$\begin{cases} B_x(x, y, z) = B_{1x}(x, y, z) + B_{2x}(x, y, z) + B_{3x}(x, y, z), \\ B_y(x, y, z) = B_{1y}(x, y, z) + B_{2y}(x, y, z) + B_{3y}(x, y, z), \\ B_z(x, y, z) = B_{1z}(x, y, z) + B_{2z}(x, y, z) + B_{3z}(x, y, z), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} B_{1x}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \left[A_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} + B_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} \right], \\ B_{2x}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_{3x}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^3} \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{h} z \left[E_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^3} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} - F_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^3} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} \right], \\ B_{1y}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y \left[A_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} + B_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} \right], \\ B_{2y}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B_{3y}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{h} z \left[E_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} + F_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} \right], \\ B_{1z}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^1} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \left[A_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^1} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} - B_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^1} (h-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^1} h} \right], \\ B_{2z}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \\ B_{3z}(x, y, z) &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{m\pi}{h} z \left[E_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} + F_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^3} a} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Взаимная связь постоянных разделения переменных Фурье. Наиболее важным для практики является вариант, когда присутствуют только граничные функции $\psi_1(x, z)$ и $\psi_2(x, z)$ соответственно на нижней и верхней сторонах параллелепипеда. Согласно формулам (15)–(17) будем иметь

$$B_{2x}(x, y, z) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \quad (18)$$

$$B_{2y}(x, y, z) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right], \quad (19)$$

$$B_{2z}(x, y, z) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right]. \quad (20)$$

Полагая, что внутри рассматриваемого прямоугольника расположен магнит с намагниченностью $M(n, m)$, направленной по оси y , будем иметь магнитные потоки Φ_{1y} в нижней ($y = 0$) и Φ_{2y} верхней ($y = b$) сторонах параллелепипеда. Учитывая разную ориентацию этих сторон относительно направления оси y , из (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_{1y} &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \left[C_{nm} \frac{1}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] \int_0^a \int_0^h \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z dx dz + M(n, m) ah = \\ &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \left[C_{nm} \frac{1}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] \frac{4ah}{\pi^2 nm} + M(n, m) ah, \\ \Phi_{2y} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \left[C_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{1}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] \int_0^a \int_0^h \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{h} z dx dz - M(n, m) ah = \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}^2} \left[C_{nm} \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} - D_{nm} \frac{1}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] \frac{4ah}{\pi^2 nm} - M(n, m) ah. \end{aligned}$$

Из условия $\Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0$ находим

$$C_{nm} - D_{nm} \text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b - C_{nm} \text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b + D_{nm} = 0.$$

Откуда следует важное равенство

$$C_{nm} = -D_{nm}. \quad (21)$$

Применительно к формуле (33) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_{1x} &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \int_0^b \int_0^h \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] dy dz = \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nh}{ma} (\cos m\pi - 1) \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b - 1}{\sqrt{\lambda_{nm}^2} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} (C_{nm} + D_{nm}), \\ \Phi_{2x} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \cos n\pi \int_0^b \int_0^h \sin \frac{m\pi}{h} z \left[C_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] dy dz = \\ &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nh}{ma} \cos n\pi (\cos m\pi - 1) \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b - 1}{\sqrt{\lambda_{nm}^2} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} (C_{nm} + D_{nm}). \end{aligned}$$

Из условия $\Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0$ находим

$$(\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)(C_{nm} + D_{nm}) = 0. \quad (22)$$

Из равенства (22) следует, что при нечётных значениях порядков гармоник n и m будет справедливо ранее полученное равенство (21). Такой же результат будет иметь место, когда одни из гармоник будут чётны, а другие нечётны.

Обращаясь к формуле магнитной индукции (20), найдём

$$\begin{aligned} \Phi_{1z} &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{n\pi}{a} x \left[C_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] dx dy = \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma}{nh} (\cos n\pi - 1) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b - 1}{\sqrt{\lambda_{nm}^2} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} (C_{nm} + D_{nm}), \\ \Phi_{2z} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h} \cos m\pi \int_0^a \int_0^b \sin \frac{n\pi}{a} x \left[C_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} + D_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} \right] dx dy = \\ &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma}{nh} \cos m\pi (\cos n\pi - 1) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b - 1}{\sqrt{\lambda_{nm}^2} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}^2} b} (C_{nm} + D_{nm}). \end{aligned}$$

Из условия $\Phi_{1z} + \Phi_{2z} = 0$ находим выражение, совпадающее с формулой (22).

Выводы. 1. Решение уравнения Лапласа для параллелепипеда является суммой решений трёх частных задач.

2. Граничные функции параллелепипеда являются нечётными периодическими по двум переменным функциями, периоды которых равны длинам соответствующих сторон параллелепипеда.

3. Постоянные Фурье частичных решений задачи являются коэффициентами разложения граничных периодических функций двух переменных в тригонометрический ряд Фурье.

4. В двумерных рядах решения уравнения Лапласа для нечётных и для совокупности одновременно чётных и нечётных гармоник постоянные Фурье отличаются только знаками.

Литература

1. *Афанасьев А.А.* Метод разделения переменных в аналитических расчётах электрических машин. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2022. 278 с.
2. *Афанасьев А.А.* Трёхмерная аналитическая модель сверхминиатюрного магнитоэлектрического вентильного двигателя // *Электротехника.* 2023. № 7. С. 15–21.
3. *Боголюбов А.Н., Кравицов В.В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 350 с.
4. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
5. *Голоскоков Д.П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 539 с.
6. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 304 с.
7. *Иванов-Смоленский А.В.* Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. М.: Высш. шк., 1989. 312 с.

8. Куралбаев З. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения с отрицательным знаком при старшей производной // The Scientific Heritage. 2022. № 103. С. 63–66.

9. Ковалев С.В. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер. Естественные и технические науки. 2019. № 12. С. 66–70.

10. Пестриков В.М. Математические методы в инженерии. СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. 158 с.

11. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники: в 3 т. Т. 3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.

12. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

13. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 384 с.

14. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Дополнительные разделы высшей математики. СПб.: Университет ИТМО, 2020. 89 с.

15. Abu Arqub O. Numerical simulation of time-fractional partial differential equations arising in fluid flows via reproducing Kernel method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2020, vol. 30, no. 11, pp. 4711–4733.

16. Wang F., Zhao Q., Chen Z., Fan C.M. Localized Chebyshev collocation method for solving elliptic partial differential equations in arbitrary 2D domains. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, vol. 397, 125903. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125903.

АФАНАСЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (afan39@mail.ru).

ИВАНОВА НАДЕЖДА НИКОЛАЕВНА – кандидат технических наук, доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (niva_mail@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7130-8588>).

Aleksandr A. AFANASYEV, Nadezhda N. IVANOVA
SOLUTION TO A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE LAPLACE EQUATION BY SEPARATION OF VARIABLES
IN A RECTANGULAR PARALLELEPIPED

Key words: *mathematical modeling, partial differential equations of elliptic type, Laplace equation, rectangular parallelepiped, Fourier constants.*

The aim of the study is to solve the boundary value problem for the Laplace equation in a rectangular parallelepiped by the method of separation of variables and to estimate the obtained Fourier variable separation constants.

Materials and methods. *Methods of mathematical physics were used to solve the boundary value problem for the Laplace equation. The initial problem was divided into three standard ones, in which the inhomogeneous boundary conditions were given only on two parallel sides, for the rest of the problem they being assumed to be equal to 0.*

Results. *The boundary value problem for the Laplace equation in a rectangular parallelepiped has been broken down into three problems. Partial solutions to these problems under given boundary conditions have been obtained. The Fourier variable separation constants are estimated.*

Findings. *The solution to the Laplace's equation for a parallelepiped is the sum of the solutions to three partial problems. The boundary functions of a parallelepiped are odd periodic over two variable functions whose periods are equal to the lengths of the corresponding sides of the parallelepiped. The Fourier constants of partial solutions to the problem are the coefficients of the expansion of the boundary periodic functions of two variables into a trigonometric Fourier series. In two-dimensional series of the solution to the Laplace's equation for odd-numbered harmonics and for a set of simultaneously even and odd harmonics, the Fourier constants differ only in signs.*

References

1. Afanasyev A.A. *Metod razdeleniya peremennykh v analiticheskikh raschetakh elektricheskikh mashin* [Method of Variable Separation in Analytical Calculations of Electrical Machines]. Cheboksary, Chuvash University Publ., 2022, 278 p.
2. Afanasyev A.A. *Trekhmernaya analiticheskaya model' sverkhminiaturnogo magnitoelektricheskogo ventil'nogo dvigatelya* [Three-Dimensional Analytical Model of a Superminiature Permanent Magnet Synchronous Motor]. *Elektrotehnika*, 2023, no. 7, pp. 15–21.
3. Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Zadachi po matematicheskoi fizike* [Problems in Mathematical Physics]. Moscow, Moscow University Publ., 1998, 350 p.
4. Budak B.M., Fomin S.V. *Kratnye integraly i ryady* [Multiples of integrals and series]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 608 p.
5. Goloskokov D.P. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple* [Equations of Mathematical Physics. Problem solving in the Maple system]. St. Petersburg, Piter Publ., 2004, 539 p.
6. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Reference to Linear Ordinary Differential Equations]. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 304 p.
7. Ivanov-Smolenskii A.V. *Elektromagnitnye sily i preobrazovanie energii v elektricheskikh mashinakh* [Electromagnetic Forces and Energy Conversion in Electrical Machines]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1989, 312 p.
8. Kuralbaev Z. *Reshenie zadachi Koshi dlya differentsial'nogo uravneniya s otritsatel'nym znakom pri starshei proizvodnoi* [Solving the Cauchy Problem for a Differential Equation with a Negative Sign at a Senior Derivative]. *The Scientific Heritage*, 2022, no. 103, pp. 63–66.
9. Kovalev S.V. *Kompleksnye issledovaniya nauchnykh i tekhnicheskikh problem s primeneniem sovremennoi tekhnologii matematicheskogo modelirovaniya i vychislitel'nogo eksperimenta* [Comprehensive Research of Scientific and Technical Problems Using Modern Technology of Mathematical Modeling and Computational Experiment]. *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Ser. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2019, no. 12, pp. 66–70.
10. Pestrikov V.M. *Matematicheskie metody v inzhenerii* [Mathematical Methods in Engineering]. St. Petersburg, 2023, 158 s.
11. Polivanov K.M. *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki: v 3 t. T. 3. Teoriya elektromagnitnogo polya* [Theoretical Foundations of Electrical Engineering: in 3 vols. Vol. 3: Electromagnetic Field Theory]. Moscow, Energiya Publ., 1969, 352 p.
12. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p.
13. Farlow St.J. *Partial differential equations for scientists and engineers*. Wileu, 1982 (Russ. ed.: *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow, Mir Publ., 1985, 384 p.).
14. Kholodova S.E., Peregudin S.I. *Dopolnitel'nye razdel'y vysshei matematiki* [Additional Sections of Higher Mathematics]. St. Petersburg, 2020, 89 p.
15. Abu Arqub O. Numerical simulation of time-fractional partial differential equations arising in fluid flows via reproducing Kernel method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2020, vol. 30, no. 11, pp. 4711–4733.
16. Wang F., Zhao Q., Chen Z., Fan C.M. Localized Chebyshev collocation method for solving elliptic partial differential equations in arbitrary 2D domains. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, vol. 397, 125903. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125903.

ALEKSANDR A. AFANASYEV – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (afan39@mail.ru).

NADEZHDA N. IVANOVA – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical and Hardware Support of Information Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (niva_mail@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7130-8588>).

Формат цитирования: *Афанасьев А.А., Иванова Н.Н.* Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа методом разделения переменных в прямоугольном параллелепипеде // Вестник Чувашского университета. – 2023. – № 4. – С. 35–43. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-35-43.