

DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-15-23

УДК [517.956.225:517.982.43]:621.313-465

ББК В161.68:К500.131

А.А. АФАНАСЬЕВ

ВНЕШНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Ключевые слова: полые и сплошные цилиндры, уравнение Лапласа, граничные условия, электромеханические устройства с радиальными и аксиальными зазорами.

Введение. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных Фурье для цилиндрических областей позволяет исследовать электромеханические устройства в формате 3D.

Цель исследования – получение аналитических выражений для магнитных потенциалов и индукций внешних трёхмерных пространств электромеханических устройств в цилиндрической системе координат.

Материалы и методы. Неизвестные постоянные в выражениях для рассматриваемых областей находятся из граничных условий магнитного поля на общих границах электромеханического устройства с его внешним пространством: скалярные магнитные потенциалы и магнитные индукции одинаковы, токовые листы испытывают скачок. При получении аналитических выражений использовались методы математической физики.

Результаты исследований. Для нахождения постоянных Фурье рассмотрены внешние трёхмерные пространства классических электромеханических устройств (генераторов, двигателей), которые в цилиндрической системе координат представляются как полыми, так и сплошными цилиндрами, стыкующимися с активными областями устройств своими цилиндрическими или торцевыми поверхностями. Получены общие выражения для магнитных потенциалов и индукций внешних пространств на основе решения уравнения Лапласа, как задачи Штурма–Лиувилля, методом разделения переменных Фурье. Проанализированы магнитные поля внешних пространств исходного полого цилиндра: наружного цилиндра с бесконечно большим радиусом; внутреннего сплошного цилиндра; торцевых цилиндров конечной длины. Эти данные дают возможность увеличить необходимое количество уравнений для нахождения требуемого числа постоянных Фурье при аналитическом расчёте электромеханических устройств методом разделения переменных.

Выводы. Получены аналитические выражения для граничных значений магнитных потенциалов и индукций внешнего пространства, примыкающего к активным областям электромеханических устройств с воздушными зазорами как радиального, так и аксиального вида.

Введение. Большинство электромеханических устройств может иметь математическое описание в цилиндрических координатах. Формирование математических моделей этих устройств методом разделения переменных Фурье на основе граничных условий для магнитного поля требует обращения к условиям стыковки поля на внешней границе активной области моделируемого объекта. В этой связи анализ внешнего магнитного поля в окружающих пространствах цилиндрической формы достаточно актуален. Поскольку модели электрических машин на базе метода разделения переменных начали использоваться на практике сравнительно недавно, исследований по теме настоящей статьи также невелико. Например, решение уравнения Лапласа для полого цилиндра конечной длины отсутствует в известных справочниках по линейным уравнениям математической физики [8].

Цель исследования – получение аналитических выражений на базе уравнений математической физики [3, 4, 7] для магнитных потенциалов и индукций внешних трехмерных пространств электромеханических устройств в цилиндрической системе координат.

Материалы и методы. Активное пространство (магнитные сердечники с воздушными зазорами между ними) большинства электромеханических устройств с радиальным воздушным зазором можно представить в виде совокупности вложенных друг в друга полых цилиндров.

В устройствах с аксиальными воздушными зазорами полые цилиндры имеют торцевую стыковку друг с другом [12].

Магнитные поля в каждом из этих цилиндров описываются на базе метода разделения переменных Фурье функциями Бесселя [1, 5, 6, 9–11]. Неизвестные постоянные этого метода находятся из условий на общих границах сопрягаемых полых цилиндров: скалярные магнитные потенциалы и магнитные индукции одинаковы, токовые листы (МДС) испытывают скачок.

Результат исследования. Для использования граничных условий на внешних границах устройств нужно иметь математическое описание магнитного поля окружающего пространства, которое можно представить также в виде полых цилиндров с соответствующими внешними значениями координат r , φ и z . Получены выражения для магнитных потенциалов и индукций для внешних пространств цилиндрической формы с конечной длиной и с различными внешними радиусами, включая и бесконечно большие.

Цилиндрическое внешнее пространство, примыкающее к наружной цилиндрической поверхности полого цилиндра конечной длины. Одной из частей наружного пространства исходного полого цилиндра заданной длины (рис. 1) является также полый цилиндр той же длины, у которого наружный радиус b стремится к бесконечности.

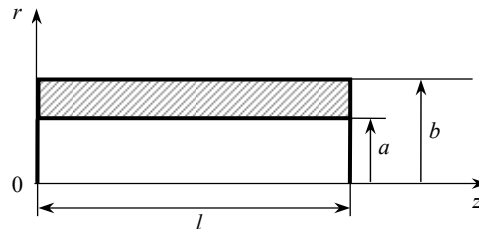


Рис. 1. Продольный разрез исходного полого цилиндра

Скалярный магнитный потенциал полого цилиндра описывается выражением [1]

$$u(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi, z) + u_2(r, \varphi, z). \quad (1)$$

Слагаемые выражения (1) задаются формулами:

$$u_1(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) - N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) \right] \times \\ \times \left[A_{nk} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^{(n)}} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^{(n)}} l} + B_{nk} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^{(n)}} (l-z)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^{(n)}} l} \right] \cos n\varphi, \quad (2)$$

$$u_2(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{nk} I_n(\sqrt{\lambda_k} r) + D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k} r) \right] \sin \sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi; \quad (3)$$

где J_n и N_n – функции Бесселя первого и второго рода соответственно; I_n и K_n – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, или функции Инфельда и Макдональда, соответственно; $\lambda_k^{(n)}$ – собственные числа:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2. \quad (4)$$

Собственные числа $\lambda_k^{(n)}$ в формуле (2), соответствующие порядку n и корню k цилиндрических функций J_n и N_n , находятся в качестве корней нелинейных уравнений, зависящих только от радиусов a и b :

$$\frac{J_n(\sqrt{\lambda} a)}{J_n(\sqrt{\lambda} b)} = \frac{N_n(\sqrt{\lambda} a)}{N_n(\sqrt{\lambda} b)}. \quad (5)$$

Будем полагать, что цилиндрическая поверхность, внешняя к исходному полому цилиндру, имеет одинаковую длину с ним и наружные радиусы: внутренний $a_1 = b$, внешний b_1 .

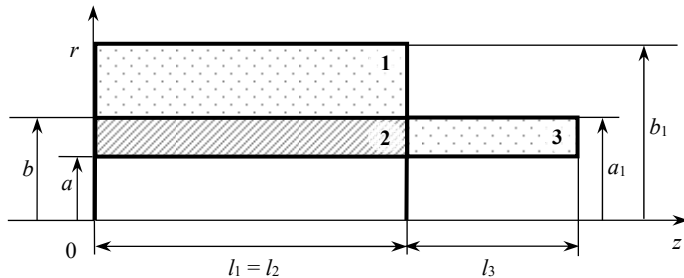


Рис. 2. Исходный полый цилиндр (2) и его внешние цилиндрические пространства: наружное (1) и торцевое (3)

При $b_1 \rightarrow \infty$ функции J_n и N_n имеют следующие асимптотические приближения [6, 11]:

$$\begin{aligned} J_n(\sqrt{\lambda} b_1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\lambda} b_1}} \cos \left(\sqrt{\lambda} b_1 - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right); \\ N_n(\sqrt{\lambda} b_1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\lambda} b_1}} \sin \left(\sqrt{\lambda} b_1 - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражений (5), (6) можем записать

$$\frac{J_n(\sqrt{\lambda} a)}{N_n(\sqrt{\lambda} a)} = \frac{J_n(\sqrt{\lambda} b_1)}{N_n(\sqrt{\lambda} b_1)} = \frac{\cos(\sqrt{\lambda} b_1 - \alpha)}{\sin(\sqrt{\lambda} b_1 - \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b_1)}{-\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} b_1)}, \quad (7)$$

где $\alpha = n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Приняв в (7) $\sqrt{\lambda}b_1 = \pi(\infty)$, получим нелинейное уравнение для нахождения собственных чисел $\lambda_k^{(n)}$ для этого внешнего пространства

$$\frac{J_n(\sqrt{\lambda}a)}{N_n(\sqrt{\lambda}a)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (8)$$

В выражении (3) для потенциала $u_2(r, \varphi, z)$ при $r=b \rightarrow \infty$ модифицированная цилиндрическая функция Бесселя первого рода (функция Инфельда) $I_n(\sqrt{\lambda_k}r)$ стремиться к бесконечности. Поэтому неизвестную постоянную C_{nk} в этой формуле следует принять равной нулю, поскольку магнитный потенциал $u_2(r, \varphi, z)$ не может становиться бесконечно большим при $r = b \rightarrow \infty$.

Формула (3) для рассматриваемого внешнего пространства будет содержать только одну неизвестную постоянную D_{nk}

$$u_2(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k}r) \sin \sqrt{\lambda_k}z \cos n\varphi.$$

При $r = a_1 = b$ формула (2) принимает нулевое значение: $u_1(b, \varphi, z) = 0$. Тогда магнитный потенциал внешней поверхности на границе с исходной цилиндрической поверхностью при $r = b$ будет равен

$$u(b, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k}b) \sin \sqrt{\lambda_k}z \cos n\varphi.$$

Координатные составляющие магнитной индукции для внешнего пространства находятся путем дифференцирования скалярного магнитного потенциала (1) по координатам r, φ, z .

$$\begin{aligned} B(r, \varphi, z)_r = & -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{dJ_n(\sqrt{\lambda_k^n}r)}{dr} N_n(\sqrt{\lambda_k^n}a_1) - \frac{dN_n(\sqrt{\lambda_k^n}r)}{dr} J_n(\sqrt{\lambda_k^n}a_1) \right] \times \\ & \times \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^n}z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^n}l} A_{nk} + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^n}l - z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^n}l} B_{nk} \right] \cos n\varphi - \\ & - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{dI_n(\sqrt{\lambda_k}r)}{dr} C_{nk} + \frac{dK_n(\sqrt{\lambda_k}r)}{dr} D_{nk} \right] \sin \sqrt{\lambda_k}z \cos n\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(r, \varphi, z)_z = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r) N_n(\sqrt{\lambda_k}a_j) - N_n(\sqrt{\lambda_k}r) J_n(\sqrt{\lambda_k}a_j) \right] \times \\ & \times \left[\sqrt{\lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k}z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} A_{nk} - \sqrt{\lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k}(l-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} B_{nk} \right] \cos(n\varphi) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[I_n(\sqrt{\lambda_k}r) C_{nk} + K_n(\sqrt{\lambda_k}r) D_{nk} \right] \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}z) \cos(n\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(r, \varphi, z)_\varphi = & \frac{\mu_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k^n} r) N_n(\sqrt{\lambda_k^n} a_j) - N_n(\sqrt{\lambda_k^n} r) J_n(\sqrt{\lambda_k^n} a_j) \right] \times \\
& \times \left[\frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} l} A_{nk} + \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} (l-z)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} l} B_{nk} \right] n \sin(n\varphi) + \\
& + \frac{\mu_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[I_n(\sqrt{\lambda_k} r) C_{nk} + K_n(\sqrt{\lambda_k} r) D_{nk} \right] \sin(\sqrt{\lambda_k} z) n \sin(n\varphi),
\end{aligned}$$

где

$$\frac{dJ_n(\sqrt{\lambda_k^n} r)}{dr} = \frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{2} \left[J_{n-1}(\sqrt{\lambda_k^n} r) - J_{n+1}(\sqrt{\lambda_k^n} r) \right]; \quad (9)$$

$$\frac{dN_n(\sqrt{\lambda_k^n} r)}{dr} = \frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{2} \left[N_{n-1}(\sqrt{\lambda_k^n} r) - N_{n+1}(\sqrt{\lambda_k^n} r) \right];$$

$$\frac{dI_n(\sqrt{\lambda_k} r)}{dr} = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2} \left[I_{n-1}(\sqrt{\lambda_k} r) + I_{n+1}(\sqrt{\lambda_k} r) \right]; \quad (10)$$

$$\frac{dK_n(\sqrt{\lambda_k} r)}{dr} = \frac{-\sqrt{\lambda_k}}{2} \left[K_{n-1}(\sqrt{\lambda_k} r) + K_{n+1}(\sqrt{\lambda_k} r) \right].$$

На границе с исходной цилиндрической поверхностью, когда $r = b$, магнитные индукции будут равны

$$\begin{aligned}
B(b, \varphi, z)_r = & -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{2} \left\{ \left[J_{n-1}(\sqrt{\lambda_k^n} b) - J_{n+1}(\sqrt{\lambda_k^n} b) \right] N_n(\sqrt{\lambda_k^n} b) - \right. \\
& \left. - \left[N_{n-1}(\sqrt{\lambda_k^n} b) - N_{n+1}(\sqrt{\lambda_k^n} b) \right] J_n(\sqrt{\lambda_k^n} b) \right\} \times \\
& \times \left[\frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} l} A_{nk} + \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} (l-z)}{\text{sh} \sqrt{\lambda_k^n} l} B_{nk} \right] \cos n\varphi + \\
& + \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\lambda_k}}{2} \left[K_{n-1}(\sqrt{\lambda_k} b) + K_{n+1}(\sqrt{\lambda_k} b) \right] D_{nk} \right] \sin \sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi,
\end{aligned}$$

$$B(b, \varphi, z)_z = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[K_n(\sqrt{\lambda_k} b) D_{nk} \right] \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} z) \cos(n\varphi),$$

$$B(b, \varphi, z)_\varphi = \frac{\mu_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[K_n(\sqrt{\lambda_k} b) D_{nk} \right] \cos(\sqrt{\lambda_k} z) n \sin(n\varphi).$$

Торцевые внешние пространства полого цилиндра конечной длины.

Это внешнее пространство имеет ту же толщину, что и у исходного полого цилиндра (рис. 2). При формировании граничных условий на торцах исходного цилиндра с длиной l_1 координата z будет принимать значения ноль или l_1

$$z = 0, (l_1). \quad (11)$$

Для внешнего торцевого цилиндра с длиной $l \rightarrow \infty$ магнитный потенциал для границы (11) согласно формулам (1)–(4) будет иметь вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) - N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) \right] B_{nk} \cos n\varphi,$$

где собственные числа $\lambda_k^{(n)}$, зависящие, согласно формуле (5), только от радиусов a и b , будут иметь те же значения, что и у исходного цилиндра.

Цилиндрическое внешнее пространство, примыкающее к внутренней цилиндрической поверхности полого цилиндра конечной длины. Этим внешним пространством является сплошной цилиндр с той же длиной, что и исходный цилиндр.

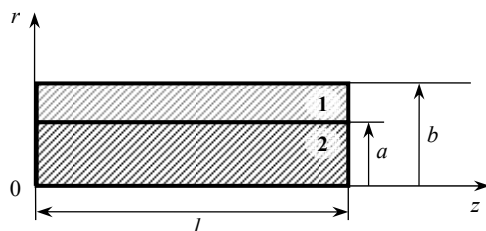


Рис. 3. Основной полой цилиндр 1 и его внутреннее пространство 2 в виде сплошного цилиндра

Из литературы, например [2, 8], известно выражение для скалярного магнитного потенциала сплошного цилиндра. Применительно к [2] имеем для скалярного магнитного потенциала сплошного цилиндра

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{nk}} r) \left\{ \left[\frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l} A_{nk} + \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l - z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l} B_{nk} \right] \cos n\varphi \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n(\sqrt{\lambda_k} r)}{I_n(\sqrt{\lambda_k} a)} C_{nk} \sin \sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi, \quad (12)$$

где a, l – соответственно радиус и длина цилиндра; $\sqrt{\lambda_{nk}}$ – корни уравнения

$$J_n(\sqrt{\lambda_{nk}} a) = 0, \quad (13)$$

$n = 1, 2, \dots$, – порядки функции Бесселя первого рода; $k = 1, 2, \dots, \infty$ – номера корней;

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \infty;$$

$I_n(\sqrt{\lambda_k} r)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда); A_{nk}, B_{nk}, C_{nk} – неизвестные постоянные.

Применительно к внутренней границе $r = a$ исходного цилиндра имеем из (12), (13)

$$u(a, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \sin \sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi.$$

Координатные составляющие магнитной индукции для внешнего пространства находятся путем дифференцирования скалярного магнитного

потенциала (12) по координатам r , φ , z . С учётом выражений (9) и (10) будем иметь

$$\begin{aligned}
 B(a, \varphi, z)_r &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2} \left[J_{n-1}(\sqrt{\lambda_{nk}} a) - J_{n+1}(\sqrt{\lambda_{nk}} a) \right] \times \\
 &\quad \times \left\{ \left[\frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l} A_{nk} + \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l - z}{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} l} B_{nk} \right] \cos n\varphi \right\} - \\
 &\quad - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2} \frac{\left[I_{n-1}(\sqrt{\lambda_k} a) + I_{n+1}(\sqrt{\lambda_k} a) \right]}{I_n(\sqrt{\lambda_k} a)} C_{nk} \sin \sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi, \\
 B(a, \varphi, z)_z &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} z) \cos(n\varphi), \\
 B(a, \varphi, z)_\varphi &= \frac{\mu_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \sin(\sqrt{\lambda_k} z) n \sin(n\varphi).
 \end{aligned}$$

Выводы. 1. Получены выражения для граничных значений магнитных потенциалов и индукций внешнего пространства, примыкающего к активным областям электромеханических устройств с воздушными зазорами как радиального, так и аксиального вида.

2. Неизвестные постоянные в полученных граничных формулах находятся из условий на наружных границах устройства: скалярные магнитные потенциалы и магнитные индукции одинаковы, токовые листы (МДС) испытывают скачок на величину полного тока листа.

Литература

1. Афанасьев А.А., Иванова Н.Н. Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных для полого цилиндра конечной длины // Вестник Чувашского университета. 2023. № 2. С. 32–40. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-2-32-40.
2. Боголюбов А.Н., Крайцов В.В. Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 350 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1980. 975 с.
4. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 539 с.
5. Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я. К расчету поля конечного магнитного цилиндра // Дефектоскопия. 2019. № 10. С. 24–34.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965. 423 с.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными: пер. с японск. М.: Мир, 1977. 504 с.
8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
9. Справочник по специальным функциям / пер. с англ. под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 384 с.
11. Функции Бесселя / сост. В.И. Зубов. М.: МФТИ, 2007. 51 с.
12. Шайтор Н. Электромеханические структуры сложных конфигураций. Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. 168 с.

АФАНАСЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (afan39@mail.ru).

Aleksandr A. AFANASYEV
OUTER CYLINDRICAL SPACES
OF A HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH

Key words: hollow and solid cylinders, Laplace equation, boundary conditions, electromechanical devices with radial and axial gaps.

Introduction. The solution of the Laplace equation by the method of separation of Fourier variables for cylindrical domains makes it possible to study electromechanical devices in 3D format.

The purpose of the study is to obtain analytical expressions for magnetic potentials and inductions of external three-dimensional spaces of electromechanical devices in a cylindrical coordinate system.

Materials and methods. The unknown constants in the expressions for the regions under consideration are found from the boundary conditions of the magnetic field at the common boundaries of the electromechanical device with its outer space: the scalar magnetic potentials and magnetic inductions are the same, the current sheets experience a jump. When obtaining analytical expressions, the methods of mathematical physics were used.

Research results. To find the Fourier constants, the outer three-dimensional spaces of classical electromechanical devices (generators, motors) are considered, which in a cylindrical coordinate system are represented by both hollow and solid cylinders joining the active regions of the devices with their cylindrical or end surfaces. General expressions for magnetic potentials and inductions of external spaces are obtained based on the solution of the Laplace equation as the Sturm–Liouville problem by the Fourier method of separation of variables. The magnetic fields of the outer spaces of the original hollow cylinder are analyzed: an outer cylinder with an infinitely large radius; internal solid cylinder; end cylinders of finite length. These data make it possible to increase the required number of equations to find the required number of Fourier constants in the analytical calculation of electromechanical devices by the method of separation of variables.

Findings. Analytical expressions for the boundary values of magnetic potentials and inductions of the external space adjacent to the active regions of electromechanical devices with air gaps of both radial and axial form are obtained.

References

1. Afanasyev A.A., Ivanova N.N. *Reshenie uravneniya Laplasya metodom razdeleniya perymennykh dlya pologo tsilindra konechnoi dliny* [Solution of the Laplace equation by the method of separation of variables for a length hollow cylinder]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2023, no. 2, pp. 32–40. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-2-32-40.
2. Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Zadachi po matematicheskoi fizike* [Problems in mathematical physics]. Moscow, Moscow University Publ., 1998, 350 p.
3. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 975 p.
4. Goloskokov D.P. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple* [Equations of mathematical physics. Solving problems in the Maple system]. St. Petersburg, Piter Publ., 2004, 539 p.
5. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskii V.Y. To the calculation of the field of a finite magnetic cylinder. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 734–745.
6. Kuznetsov D.S. *Spetsial'nye funktsii* [Special features]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965, 423 p.

7. Mizokhata S. *Teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Theory of partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1977, 504 p.
8. Polyenin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p.
9. Abramowitz M., Stegun I., eds. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Issued. National Bureau of Standards, 1964, 470 p. (Russ. ed.: *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p.).
10. Farlow S.J. Partial differential equations for scientists and engineers. Wiley, 1982 (Russ. ed.: *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow, Mir Publ., 1985, 384 p.).
11. Zubov V.I., comp. *Funktsii Besselya* [Bessel functions]. Moscow, MFTI Publ., 2007, 51 p.
12. Shaitor N. *Elektromekhanicheskie struktury slozhnykh konfiguratsii* [Electromechanical structures of complex configurations]. Vologda, Infra-Inzheneriya Publ., 2023, 168 p.

ALEKSANDR A. AFANASYEV – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (afan39@mail.ru).

Формат цитирования: Афанасьев А.А. Внешние цилиндрические пространства полого цилиндра конечной длины // Вестник Чувашского университета. – 2023. – № 4. – С. 15–23. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-15-23.