DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-109-119

УДК 517.548
ББК В161.55

С.П. КУЗНЕЦОВ, В.В. МОЧАЛОВ, В.П. ЧУЕВ

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА В АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА $R_{4,0}, R_{1,3}, R_{5,0}$

Ключевые слова: *действительная алгебра Клиффорда, сопряжения в алгебрах Клиффорда, делители нуля, обратный элемент, уравнение Сильвестра, робастность, пьезопривод.*

Целью исследования *являются построение алгоритма нахождения обратных элементов в алгебрах Клиффорда* $\mathbf{R}_{4,0}, \mathbf{R}_{1,3}, \mathbf{R}_{5,0}$ *и решение нелинейного уравнения Сильвестра* $AX + XB = C$.

Материалы и методы. *С помощью основных операций сопряжения в алгебрах Клиффорда найти алгоритм нахождения обратных элементов. Применить данный алгоритм для решения уравнения Сильвестра.*

Результаты исследования. *В алгебрах Клиффорда* $\mathbf{R}_{4,0}, \mathbf{R}_{1,3}, \mathbf{R}_{5,0}$, *которые имеют большое приложение в физике, найден метод нахождения обратных элементов, найдены уравнения для нахождения делителей нуля. Найденный алгоритм используется для решения уравнения Сильвестра. Для алгебр Клиффорда четной размерности* $\mathbf{R}_{4,0}, \mathbf{R}_{1,3}$ *дается алгоритм нахождения обратных элементов. Нахождение обратных элементов тесно связано с понятием делителей нуля в этих алгебрах. Метод нахождения обратного элемента применяется для решения уравнения Сильвестра, при этом используются четностное сопряжение, сопряжение реверс и сопряжение Клиффорда. Для нечетной алгебры Клиффорда* $\mathbf{R}_{5,0}$ *найдено сопряжение, с помощью которого можно применять алгоритм нахождения обратного элемента. Метод нахождения обратного элемента применяется для решения уравнения Сильвестра, которое, в частности, используется для обеспечения робастности пьезопривода с использованием метода управляемой относительной интервальности.*

Выводы*. Построен алгоритм нахождения обратных элементов и решено уравнение Сильвестра в алгебрах Клиффорда* $\mathbf{R}_{4,0}, \mathbf{R}_{1,3}, \mathbf{R}_{5,0}$.

Введение. Алгебры Клиффорда – это одно из актуальных направлений современной математики. Хорошо известно их применение в математике, в физике, космической динамике, робототехнике, в частности для разработки алгоритмов распознавания, для обеспечения робастности пьезопривода с использованием метода управляемой относительной интервальности. Вопрос о нахождении обратных элементов и решение уравнения Сильвестра остается важнейшей задачей.

Целью исследования являются построение алгоритма нахождения обратных элементов в алгебрах Клиффорда $\mathbf{R}_{4,0}, \mathbf{R}_{1,3}, \mathbf{R}_{5,0}$ и решение нелинейного уравнения Сильвестра $AX + XB = C$.

Материалы и методы. С помощью основных операций сопряжения в алгебрах Клиффорда найден алгоритм нахождения обратных элементов. Этот алгоритм применяется для решения уравнения Сильвестра.

Пусть $R_{p,q}$ – действительная алгебра Клиффорда размерности $m = 2^n$ $(n = p + q)$ с базисом $e_\alpha = e_{i_{1_1}\dots i_k} 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, где мультииндекс $\alpha = i_1 \dots i_k$ пробегает все подмножества в множестве $\{1,\dots,n\}$, совокупность которых обозначим через Γ_n. Пусть $e_0 = 1, e_1, \dots. e_n$ – генераторы базиса, $e_{12\dots n} = e_\tau$. Произведение в $R_{p,q}$ определяется соотношением

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}\varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = 1, i = 1, \dots, p; \varepsilon_i = e_i^2 = -1, i = p+1, \dots, p+q$.

Произвольный элемент алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ записывается в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_n} x_\alpha e_\alpha, \tag{1}$$

где x_α – действительные числа.

Выражение (1) можно записать и в другой форме

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_{n-1}} z_\alpha e_\alpha,$$

где z_α – комплексные или двойные числа.

Множество элементов алгебры Клиффорда, коммутирующих со всеми элементами базиса, называется центром. Известно, что для нечетной алгебры Клиффорда центр имеет вид $x_0 e_0 + x_\tau e_\tau$, где $e_\tau = e_1 e_2 \dots e_n$, для четной алгебры Клиффорда центр имеет вид $x_0 e_0$ [4, 8].

В алгебрах Клиффорда исследования по решению уравнения Сильвестра проводились в работах [6, 9, 10]. В работе [9] дан метод решения уравнения Сильвестра в алгебрах Клиффорда малых размерностей $n = p + q \leq 3$. В работе [10] дается метод построения частного решения уравнения Сильвестра в алгебрах Клиффорда размерности $n = p + q \geq 4$. При этом используется метод нахождения обратных элементов [8] и вычислительная программа. В работе [2] для действительных алгебр Клиффорда изучены вопросы существования обратных элементов и найдены формулы для их вычисления по аналогии с методом блочных матриц.

Алгебра Клиффорда $\boldsymbol{R}_{1,3}$ (алгебра пространства-времени) используется в физике [3, 5]. Алгебра Клиффорда $\boldsymbol{R}_{4,1}$ широко используется в геометрии, робототехнике и компьютерном моделировании [7, 1].

1. Действительная алгебра Клиффорда. Пусть $R_{p,q}$ – действительная алгебра Клиффорда. Произвольный элемент алгебры $R_{p,q}$ представим в виде (1). Рангом базисного элемента e_α назовем длину мультииндекса α. Элемент $w \in R_{p,q}$ запишем в виде суммы элементов рангов от 0 до n:

$$w = \sum_{k=0}^{n} w^k.$$

В монографии [4. С. 81–83] введены три операции сопряжения: реверс, четностное сопряжение, клиффордово сопряжение. Операция сопряжения реверс $w \to \widetilde{w}$ такова, что она обращает порядок следования множителей в произведении генераторов:

$$(e_{\iota_1}\widetilde{e_{\iota_2}\dots e_{\iota_k}}) = e_{i_k}\dots e_{i_2} e_{i_1}.$$

Для элемента $w \in R_{p,q}$ имеем

$$\widetilde{w} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} w^k.$$

Операция четностного сопряжения $w \to w^{\wedge}$ такова, что нечетные элементы умножаются на –1, а четные элементы не меняются:

$$w^{\wedge} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k w^k.$$

Клиффордово сопряжение – это суперпозиция четностного сопряжения и реверса: $w \to \overline{w} = \widetilde{w}^{\wedge}$. Для элемента $w \in R_{p,q}$ имеем

$$\overline{w} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} w^k.$$

Эти операции обладают свойствами [4. С. 81–83; 2]:

$$\tilde{\tilde{w}} = w;\ \widetilde{(uv)} = \tilde{v} \cdot \tilde{u};\ \widetilde{(u+v)} = \tilde{u} + \tilde{v};$$
$$w^{\wedge\wedge} = w;\ (uv)^{\wedge} = u^{\wedge}v^{\wedge};\ (u+v)^{\wedge} = u^{\wedge} + v^{\wedge};$$
$$\overline{\overline{w}} = w;\ \overline{(uv)} = \overline{v} \cdot \overline{u};\ \overline{(u+v)} = \overline{u} + \overline{v}.$$

Введем другую операцию сопряжения, которая понадобится нам в дальнейшем. Обозначим $w^* = \varepsilon_n e_n w e_n$, где $\varepsilon_n = e_n^2$. Введенная операция сопряжения обладает следующими свойствами:

$$w^{**} = w;\ (u+v)^* = u^* + v^*;\ (uv)^* = u^* v^*;\ \overline{w}^* = \overline{(w)^*}.$$

В работе [11] введена еще одна операция сопряжения:

$$w^{\Delta} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2}} w^k.$$

2. Уравнение Сильвестра в матричной форме. В работе [9] в алгебрах Клиффорда размерности 2 найдено частное решение уравнения Сильвестра. Основной метод решения заключался в следующем: для произвольного элемента алгебры $w = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_{12} e_{12}$ находился сопряженный элемент $\overline{w}$ такой, что $w + \overline{w}$ и $w \cdot \overline{w}$ действительные числа. Используя эту идею, найдем решение уравнения Сильвестра для матриц второго порядка.

Рассмотрим уравнение Сильвестра вида

$$AX + XB = C, \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ – матрицы с действительными коэффициентами.

Обозначим через $\overline{B}$ матрицу вида $\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$. Тогда

$$B + \overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{22} & 0 \\ 0 & b_{11} + b_{22} \end{pmatrix},$$
$$B\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} & 0 \\ 0 & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2) умножим слева на A, затем уравнение (2) умножим справа на $\overline{B}$ и сложим оба равенства. В результате получим

$$A^2 + AX(B + \overline{B}) + XB\overline{B} = AC + C\overline{B}.$$

Уравнение Сильвестра (2) сводится к уравнению вида

$$(A^2 + A(B + \overline{B}) + B\overline{B})X = AC + C\overline{B}. \tag{3}$$

Если

$$\det(A^2 + A(B + \overline{B}) + B\overline{B}) \neq 0,$$

то решение уравнения (2) запишется в виде

$$X = (A^2 + A(B + \overline{B}) + B\overline{B})^{-1}(AC + C\overline{B}).$$

Покажем, что решение уравнения (3) является решением уравнения (2). Пусть X_1 – решение уравнения (3), т.е.

$$A^2X_1 + AX_1(B + \overline{B}) + X_1B\overline{B} - AC - C\overline{B} = 0.$$

Преобразуем его к следующему виду:

$$A(AX_1 + X_1B - C) + (AX_1 + X_1B - C)\overline{B} = 0.$$

Предположим, что X_1 не является решением (2), т.е. $AX_1 + X_1B - C = C_1 \neq 0$. Тогда получим равенство

$$AC_1 + C_1\overline{B} = 0. \tag{4}$$

Умножим равенство (4) слева на A, затем уравнение (4) умножим справа на B и сложим оба равенства. В результате получим $(A^2 + A(B + \overline{B}) + B\overline{B})C_1 = 0$. Так как $\det(A^2 + A(B + \overline{B}) + B\overline{B}) \neq 0$, то $C_1 = 0$ и X_1 является решением (2).

Аналогично решается уравнение Сильвестра для матриц второго порядка с комплексными коэффициентами.

3. Алгебра $\boldsymbol{R_{4,0}}$. Базис алгебры $R_{4,0}$ образуют элементы

$$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_4} = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}, e_3, e_{13}, e_{23}, e_{123}, e_4, e_{14}, e_{24}, e_{124}, e_{34}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\},$$

где

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_0;$$
$$e_{12}^2 = e_{13}^2 = e_{23}^2 = e_{14}^2 = e_{24}^2 = e_{34}^2 = e_{123}^2 = e_{124}^2 = e_{134}^2 = e_{234}^2 = -e_0;$$
$$e_\tau^2 = e_{1234}^2 = e_0.$$

Центр алгебры образуют элементы вида x_0e_0. Произвольный элемент алгебры можно представить в действительной и комплексной форме

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_4} x_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_4^3} z_\alpha e_\alpha, \tag{5}$$

где Γ_4^3 – обозначает совокупность подмножеств в множестве $\{1, 2, 4\}$;

$$z_0 = x_0e_0 + x_{123}e_{123};\ z_1 = x_1e_0 + x_{23}e_{123};\ z_2 = x_2e_0 - x_{13}e_{123};$$
$$z_{12} = x_{12}e_0 - x_3e_{123};\ z_4 = x_4e_0 + x_{1234}e_{123};\ z_{14} = x_{14}e_0 + x_{234}e_{123};$$
$$z_{24} = x_{24}e_0 - x_{134}e_{123};\ z_{124} = x_{124}e_0 - x_{34}e_{123},$$

где z_k – комплексные числа, так как $e_{123}^2 = -e_0$.

Запишем равенство (5) в виде

$$w = w_0e_0 + w_1e_4, \tag{6}$$

где

$$w_0 = z_0e_0 + z_1e_1 + z_2e_2 + z_{12}e_{12};$$
$$w_1 = z_4e_0 + z_{14}e_1 + z_{24}e_2 + z_{124}e_{12}.$$

Операции четностного сопряжения, реверс, операцию сопряжения Клиффорда также можно записать в виде (6)

$$\widehat{w} = \widehat{w}_0e_0 - \widehat{w}_1e_4;\ \widetilde{w} = \widetilde{w}_0e_0 + \widetilde{w}_1e_4;\ \overline{w} = \overline{w}_0e_0 - \overline{w}_1e_4;$$
$$\widehat{w}_0 = \overline{z}_0e_0 - \overline{z}_1e_1 - \overline{z}_2e_2 + \overline{z}_{12}e_{12};\ \widehat{w}_1 = \overline{z}_4e_0 - \overline{z}_{14}e_1 - \overline{z}_{24}e_2 + \overline{z}_{124}e_{12};$$
$$\widetilde{w}_0 = \overline{z}_0e_0 + \overline{z}_1e_1 + \overline{z}_2e_2 - \overline{z}_{12}e_{12};\ \widetilde{w}_1 = \overline{z}_4e_0 + \overline{z}_{14}e_1 + \overline{z}_{24}e_2 - \overline{z}_{124}e_{12};$$
$$\overline{w}_0 = z_0e_0 - z_1e_1 - z_2e_2 - z_{12}e_{12};\ \overline{w}_1 = z_4e_0 - z_{14}e_1 - z_{24}e_2 - z_{124}e_{12}.$$

Обозначим $w^* = \varepsilon_4 e_4 w e_4$. Из предыдущих равенств следует, что

$$w^* = w_0^* e_0 + w_1^* e_4,$$

где

$$w_0^* = \overline{z}_0 e_0 - \overline{z}_1 e_1 - \overline{z}_2 e_2 + \overline{z}_{12} e_{12};$$
$$w_1^* = \overline{z}_4 e_0 - \overline{z}_{14} e_1 - \overline{z}_{24} e_2 + \overline{z}_{124} e_{12}.$$

Заметим, что

$$w + \overline{w} = (w_0 + \overline{w}_0) e_0 + \left(w_1 - \overline{w}_1^*\right) e_4 =$$
$$= 2z_0 + 2(x_{1234} e_{123} + x_{234} e_{23} + x_{134} e_{13} + x_{124} e_{12}) e_4;$$
$$\widehat{w} + \widetilde{w} = (\widehat{w}_0 + \widetilde{w}_0) e_0 - (\widehat{w}_1 - \widetilde{w}_1^*) e_4 =$$
$$= 2\overline{z}_0 - 2(-x_{1234} e_{123} + x_{234} e_{23} + x_{134} e_{13} + x_{124} e_{12}) e_4;$$
$$(w + \widetilde{w})^\Delta = 2\overline{z}_0 - 2(x_{1234} e_{123} + x_{234} e_{23} + x_{134} e_{13} + x_{124} e_{12}) e_4$$

(при применении операции сопряжения Δ перед элементом e_{1234} ставится противоположный знак). Поэтому $w + \overline{w} + (\widehat{w} + \widetilde{w})^\Delta = 4x_0$. Найдем произведение $w\overline{w}$:

$$w\overline{w} = (w_0 e_0 + w_1 e_4)(\overline{w}_0 - e_4 \overline{w}_1) = (w_0 \overline{w}_0 - w_1 \overline{w}_1) e_0 + \left(w_1 \overline{w}_0^* - w_0 \overline{w}_1^*\right) e_4 =$$
$$= (w_0 \overline{w}_0 - w_1 \overline{w}_1) e_0 + (w_1 \overline{w}_0^* - (\overline{w_1 \overline{w}_0^*})^*) e_4 = M + N e_4,$$

где $M = (z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_{12}^2 - z_4^2 + z_{14}^2 + z_{24}^2 - z_{124}^2)$ – комплексное число;

$$N = 2y_0 e_{123} + 2y_1 e_{12} + 2y_2 e_{13} + 2y_3 e_{23};$$
$$y_0 = Im(\overline{z}_0 z_4 + \overline{z}_1 z_{14} + \overline{z}_2 z_{24} + \overline{z}_{12} z_{124});$$
$$y_1 = Re(\overline{z}_0 z_{124} - \overline{z}_1 z_{24} + \overline{z}_2 z_{14} - \overline{z}_{12} z_4);$$
$$y_2 = Im(-\overline{z}_0 z_{24} + \overline{z}_1 z_{124} - \overline{z}_2 z_4 + \overline{z}_{12} z_{14}).$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{w} \cdot \widetilde{w} = (\widetilde{w \cdot \overline{w}}) = \widetilde{M} + e_4 \widetilde{N} = M^* - e_4 N, (\widehat{w} \cdot \widetilde{w})^\Delta =$$
$$= M^* + N e_4, M^* = \varepsilon_4 e_4 M e_4.$$

Тогда имеем

$w\overline{w} + (\widehat{w}\widetilde{w})^\Delta = M + N e_4 + M^* - N e_4 = M + M^* -$ действительное число;

$(w\overline{w}) \cdot (\widehat{w}\widetilde{w})^\Delta = (M + N e_4)(M^* - N e_4) = (MM^* - NN^*) -$ действительное число, так как

$$N^* = \varepsilon_4 e_4 N e_4 = -2y_0 e_{123} + 2y_1 e_{12} + 2y_2 e_{13} + 2y_3 e_{23},$$
$$N \cdot N^* = 4(y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2).$$

Делители нуля в $R_{4,0}$ определяются равенством

$$MM^* - NN^* =$$
$$(z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_{12}^2 - z_4^2 + z_{14}^2 + z_{24}^2 - z_{124}^2)(\overline{z}_0^2 - \overline{z}_1^2 - \overline{z}_2^2 + \overline{z}_{12}^2 -$$
$$-\overline{z}_4^2 + \overline{z}_{14}^2 + \overline{z}_{24}^2 - z_{124}^2) - 4(y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) = 0.$$

Если $(MM^* - NN^*) \neq 0$, то обратный элемент существует и находится по формуле

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}(\widetilde{w\overline{w}})^\Delta}{MM^* - NN^*}, \ (MM^* - NN^*) \neq 0.$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$AX = B, \qquad (7)$$

где $A, B \in R_{4,0}, X \in R_{4,0} -$ неизвестный элемент.

Если элемент A имеет обратный

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}(\widetilde{A\overline{A}})^\Delta}{M_1 {M_1}^* - N_1 {N_1}^*},$$

где $(A\overline{A})(\widetilde{A\overline{A}})^\Delta = (M_1 {M_1}^* - N_1 {N_1}^*) \neq 0$, то уравнение (7) имеет решение

$$X = A^{-1}B = \frac{\overline{A}\widetilde{(A\overline{A})}^{\Delta}B}{M_1{M_1}^* - N_1{N_1}^*}.$$

Рассмотрим теперь уравнение Сильвестра

$$AX + XB = C, \tag{8}$$

где $A, B, C \in R_{4,0}$ – известные элементы алгебры $R_{4,0}$; $X \in R_{4,0}$ – неизвестный элемент.

Приведем уравнение (8) к виду (7). Сначала умножим равенство (8) слева на A^3, затем умножим равенство (8) слева на A^2, а справа на p_1, далее умножим (8) слева на A, а справа на p_2, далее умножим (8) справа на p_3 и все равенства сложим. В результате имеем

$$\begin{aligned}
&A^4X + A^3XB = A^3C, A^3Xp_1 + A^2XBp_1 = A^2Cp_1,\\
&A^2Xp_2 + AXBp_2 = ACp_2, AXp_3 + XBp_3 = Cp_3,\\
&A^4X + A^3X(B + p_1) + A^2X(Bp_1 + p_2) + AX(Bp_2 + p_3) + XBp_3 =\\
&= A^3C + A^2Cp_1 + ACp_2 + Cp_3.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (8) приводится к виду (7) относительно неизвестного $X \in R_{4,0}$, если выражения $B + p_1, Bp_1 + p_2, Bp_2 + p_3, Bp_3$ – действительные числа. Если $p_3 = \overline{B}\widetilde{(B\overline{B})}^{\Delta}$, то $Bp_3 = (B\overline{B})\widetilde{(B\overline{B})}^{\Delta}$ – действительное число. Выражение $B + p_1$ – действительное число, если $p_1 = \overline{B} + \hat{B}^{\Delta} + \tilde{B}^{\Delta}$. Далее положим $p_2 = \widetilde{(B\overline{B})}^{\Delta} + \overline{B}\hat{B}^{\Delta} + \overline{B}\tilde{B}^{\Delta}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&Bp_1 + p_2 = B\overline{B} + \widetilde{(B\overline{B})}^{\Delta} + (B + \overline{B})(\hat{B} + \tilde{B})^{\Delta} =\\
&= B\overline{B} + \widetilde{(B\overline{B})}^{\Delta} + 4(b_0^2 + b_{123}^2)e_0 - 4(b_{123}e_{123} + b_{124}e_{124}\\
&+ b_{134}e_{134} + b_{234}e_{234} + b_{1234}e_{1234})^2.
\end{aligned}$$

Это действительное число. Покажем, что $Bp_2 + p_3$ – действительное число. В самом деле

$$\begin{aligned}
&Bp_2 + p_3 = B\widetilde{\left(B\overline{B}\right)}^{\Delta} + B\overline{B}(\hat{B}^{\Delta} + \tilde{B}^{\Delta}) + \overline{B}(\hat{B}\tilde{B})^{\Delta} =\\
&= (B + \overline{B})(\hat{B}\tilde{B})^{\Delta} + B\overline{B}(\hat{B}^{\Delta} + \tilde{B}^{\Delta}).\\
&B + \overline{B} = 2(z_0e_0 + (b_{1234}e_{123} + b_{234}e_{23} + b_{134}e_{13} + b_{124}e_{12})e_4) =\\
&= 2(z_0e_0 + N_1e_4);\\
&(\hat{B} + \tilde{B})^{\Delta} = 2(\overline{z}_0e_0 - (b_{1234}e_{123} + b_{234}e_{23} + b_{134}e_{13} + b_{124}e_{12})e_4) =\\
&= 2(\overline{z}_0e_0 - N_1e_4);\\
&(\hat{B}\tilde{B})^{\Delta} = (M^*e_0 - Ne_4);\ B\overline{B} = (Me_0 + Ne_4).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(B + \overline{B})(\hat{B}\tilde{B})^{\Delta} + \left(B\overline{B}\right)\left(\hat{B}^{\Delta} + \tilde{B}^{\Delta}\right) = 2(z_0e_0 + N_1e_4)(M^* - Ne_4) +\\
&+2(M + Ne_4)(\overline{z}_0e_0 - N_1e_4) = 2z_0M^* + 2M\overline{z}_0 - 2(N_1N^* + NN_1^*)
\end{aligned}$$

является действительным числом.

Уравнение Сильвестра (8) приводится к виду

$$A_1X = B_1, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}
A_1 = A^4 + A^3(B + p_1) + A^2(Bp_1 + p_2) + A(Bp_2 + p_3) + Bp_3,\\
B_1 = A^3C + A^2Cp_1 + ACp_2 + Cp_3.
\end{gathered}$$

Если элемент A_1 имеет обратный, то

$$X = A_1^{-1}B_1 = \frac{\overline{A}_1 \widetilde{(A_1\overline{A}_1)}^{\Delta} B_1}{M_2M_2^* - N_2N_2^*}, \tag{11}$$

где $(A_1\overline{A}_1)\widetilde{(A_1\overline{A}_1)}^{\Delta} = M_2M_2^* - N_2N_2^* \neq 0$.

4. Алгебра $\boldsymbol{R_{1,3}}$. Рассмотрим теперь алгебру Дирака $R_{1,3}$. Базис алгебры образуют элементы

$$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_4} = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}, e_3, e_{13}, e_{23}, e_{123}, e_4, e_{14}, e_{24}, e_{124}, e_{34}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\},$$

где

$$e_1^2 = e_{12}^2 = e_{13}^2 = e_{14}^2 = e_0;$$
$$e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_{23}^2 = e_{24}^2 = e_{34}^2 = -e_0;$$
$$e_{123}^2 = e_{124}^2 = e_{134}^2 = e_{1234}^2 = -e_0;$$
$$e_{234}^2 = e_0.$$

Центр алгебры образует элемент e_0. Произвольный элемент представим в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_4} x_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_4^3} z_\alpha e_\alpha, \tag{12}$$

где комплексными числами являются

$$z_0 = x_0e_0 + x_{123}e_{123};\ z_1 = x_1e_0 + x_{23}e_{123};$$
$$z_2 = x_2e_0 + x_{13}e_{123};\ z_{12} = x_{12}e_0 + x_3e_{123};$$
$$z_4 = x_0e_4 + x_{1234}e_{123};\ z_{14} = x_{14}e_0 + x_{234}e_{123};$$
$$z_{24} = x_{24}e_0 + x_{134}e_{123};\ z_{124} = x_{124}e_0 + x_{34}e_{123}.$$

Запишем равенства (12) в виде

$$w = w_0e_0 + w_1e_4,$$

где

$$w_0 = z_0e_0 + z_1e_1 + z_2e_2 + z_{12}e_{12};\ w_1 = z_4e_0 + z_{14}e_1 + z_{24}e_2 + z_{124}e_{12}.$$

Отсюда получим

$$\overline{w}_0 = z_0e_0 - z_1e_1 - z_2e_2 - z_{12}e_{12};\ \overline{w}_1 = z_4e_0 - z_{14}e_1 - z_{24}e_2 - z_{124}e_{12}.$$

Найдем произведение $w\cdot\overline{w}$:

$$w\cdot\overline{w} = M + Ne_4,$$

где

$M = (z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_{12}^2 + z_4^2 - z_{14}^2 + z_{24}^2 - z_{124}^2)$ – комплексное число;

$$N = 2y_0e_{123} + 2y_1e_{12} + 2y_2e_{13} + 2y_3e_{23};$$

$y_0 = \mathrm{Im}(\overline{z}_0z_4 + \overline{z}_1z_{14} - \overline{z}_2z_{24} - \overline{z}_{12}z_{124});$

$y_1 = \mathrm{Re}(\overline{z}_0z_{124} - \overline{z}_1z_{24} + \overline{z}_2z_{14} - \overline{z}_{12}z_4);$

$y_2 = \mathrm{Im}(-\overline{z}_0z_{24} + \overline{z}_1z_{124} - \overline{z}_2z_4 + \overline{z}_{12}z_{14});$

$y_3 = \mathrm{Im}(\overline{z}_0z_{14} + \overline{z}_1z_4 - \overline{z}_2z_{124} - \overline{z}_{12}z_{24},$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{(w\overline{w})}^{\Delta} = M^* - Ne_4.$$

Произведение $(w\overline{w})\widetilde{(w\overline{w})}^{\Delta} = MM^* - NN^*$ – действительное число. Обратный элемент находится по формуле

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}\widetilde{(w\overline{w})}^{\Delta}}{MM^* - NN^*}, (MM^* - NN^*) \neq 0.$$

Проводя вычисления, аналогичные вычислениям пункта 2, получаем, что решение уравнения Сильвестра (8) находится по формуле (11).

5. Алгебра $\boldsymbol{R_{5,0}}$. Базис алгебры образуют элементы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_5}$, центр элементы e_0 и $e_\tau = e_{12345}$. Произвольный элемент алгебры представим в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_5} x_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_4} z_\alpha e_\alpha, \tag{13}$$

где

$z_0 = x_0e_0 + x_\tau e_\tau;\ z_1 = x_1e_0 + x_{2345}e_\tau;\ z_2 = x_2e_0 - x_{1345}e_\tau;$
$z_{12} = x_{12}e_0 - x_{345}e_\tau;\ z_3 = x_3e_0 + x_{1245}e_\tau;\ z_{13} = x_{13}e_0 + x_{245}e_\tau;$
$z_{23} = x_{23}e_0 - x_{145}e_\tau;\ z_{123} = x_{123}e_0 - x_{45}e_\tau;\ z_4 = x_4e_0 - x_{1235}e_\tau;$
$z_{14} = x_{14}e_0 - x_{235}e_\tau;\ z_{24} = x_{24}e_0 + x_{135}e_\tau;\ z_{124} = x_{124}e_0 + x_{35}e_\tau;$
$z_{34} = x_{34}e_0 - x_{125}e_\tau;\ z_{134} = x_{134}e_0 - x_{25}e_\tau;\ z_{234} = x_{234}e_0 + x_{15}e_\tau;$
$z_{1234} = x_{1234}e_0 + x_5e_\tau.$

Заметим, что $\tilde{e}_\tau = e_\tau, \hat{e}_\tau = -e_\tau, \overline{e}_\tau = -e_\tau, e_\tau^2 = e_0$; в равенстве (13) z_α – двойные числа.

Равенство (13) запишем в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_4} z_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_4^3} u_\alpha e_\alpha = w_0e_0 + w_1e_4,$$

где

$w_0 = u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12};$
$w_1 = u_4e_0 + u_{14}e_1 + u_{24}e_2 + u_{124};$
$u_0 = z_0e_0 + z_{123}e_{123};\ u_1 = z_1e_0 + z_{23}e_{123};\ u_2 = z_2e_0 - z_{13}e_{123};$
$u_{12} = z_{12}e_0 - z_3e_{123};\ u_4 = z_4e_0 + z_{1234}e_{123};\ u_{14} = z_{14}e_0 + z_{234}e_{123};$
$u_{24} = z_{24}e_0 - z_{134}e_{123};\ u_{124} = z_{124}e_0 - z_{34}e_{123}.$

Заметим, что элементы u_k, u_m коммутируют друг с другом, так как принадлежат коммутативной подалгебре, образованной элементами базиса $\{e_0, e_{123}, e_{45}, e_{12345}\}$.

Введем сопряжение, которое отличается от сопряжения Клиффорда в $R_{5,0}$:

$$w' = w_0'e_0 - e_4w_1' =$$
$$= (u_0e_0 - u_1e_1 - u_2e_2 - u_{12}e_{12})e_0 - e_4(u_4e_0 - u_{14}e_1 - u_{24}e_2 - u_{124}e_{12}).$$

Заметим, что в алгебре $R_{4,0}$ $w' = \overline{w}$. Найдем сумму $w + w'$:

$$w + w' = 2(z_0e_0 + z_{123}e_{123} + z_{124}e_{124} + z_{134}e_{134} + z_{1234}e_{1234}).$$

Из этого равенства следует, что

$$(\widetilde{w + w'}) = 2(z_0e_0 - z_{123}e_{123} - z_{124}e_{124} - z_{134}e_{134} + z_{1234}e_{1234});$$
$$(\widetilde{w + w'})^\Delta = 2(z_0e_0 - z_{123}e_{123} - z_{124}e_{124} - z_{134}e_{134} - z_{1234}e_{1234}).$$

Отсюда следует, что

$$w + w' + (\widetilde{w + w'})^\Delta = 4z_0e_0 = 4(x_0e_0 + x_\tau e_\tau) \in Z.$$

Умножим элемент w на w'. Проведем вычисления, аналогичные вычислениям пункта 2, получим

$$w \cdot w' = M + Ne_4, \tag{14}$$

где $\mathrm{M} = (u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_{12}^2 - u_4^2 + u_{14}^2 + u_{24}^2 - u_{124}^2)$ и $N = 2z_0'e_{123} + 2z_1'e_{12} + 2z_2'e_{13} + 2z_3'e_{23}, z_k' = x_k' + y_k'e_\tau$– двойные числа.

Из равенства (14) следует, что

$$(\widetilde{ww'})^\Delta = \widetilde{M} - Ne_4 = M^* - Ne_4,$$

где $M^* = \varepsilon_4e_4Me_4$.

Тогда имеем

$$(ww')(\widetilde{ww'})^{\Delta} = (Me_0 + Ne_4)(M^*e_0 - Ne_4) = (MM^* - NN^*)e_0.$$

Заметим, что $MM^* - NN^* = Le_0 + Ke_\tau$ – двойное число. Делители нуля в $R_{5,0}$ определяются равенством $L^2 - K^2 = 0$. Если $L^2 - K^2 \neq 0$, то обратный элемент определяется равенством

$$w^{-1} = \frac{w'(\widetilde{ww'})^{\Delta}(Le_0 - Ke_\tau)}{L^2 - K^2}.$$

Рассмотрим в $R_{5,0}$ функциональное уравнение

$$PX = Q, \tag{15}$$

где $P, Q \in R_{5,0}, X \in R_{5,0}$ – произвольный элемент.

Если элемент P имеет обратный, то

$$P^{-1} = \frac{P'(\widetilde{PP'})^{\Delta}(Le_0 - Ke_\tau)}{L^2 - K^2}, L^2 - K^2 \neq 0.$$

Тогда уравнение (6) имеет решение

$$X = P^{-1}Q = \frac{P'(\widetilde{PP'})^{\Delta}(Le_0 - Ke_\tau)Q}{L^2 - K^2}, L^2 - K^2 \neq 0.$$

Рассмотрим функциональное уравнение Сильвестра

$$AX + XB = C, \tag{16}$$

где A, B, C известные элементы алгебры $R_{5,0}$, $X \in R_{5,0}$ – неизвестный элемент, который нужно найти.

Повторяя рассуждения, проведенные в пункте 2, получаем равенство (9). Уравнение (16) приводится к виду (15) относительно переменной $X \in R_{5,0}$, если выражения $B + p_1, Bp_1 + p_2, Bp_2 + p_3, Bp_3$ принадлежат центру алгебры $R_{5,0}$. Если $p_3 = B'(\widetilde{BB'})^{\Delta}$, то $Bp_3 = (BB')(\widetilde{BB'})^{\Delta} \in Z$. Выражение $B + p_1 \in Z$, если $p_1 = B' + \tilde{B}^{\Delta} + \tilde{B}'^{\Delta}$. Далее положим $p_2 = (\widetilde{BB'})^{\Delta} + B'\tilde{B}^{\Delta} + B'\tilde{B}'^{\Delta}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Bp_1 + p_2 &= BB' + B\tilde{B} + B\tilde{B}' + (\widetilde{BB'})^{\Delta} + B'\tilde{B}^{\Delta} + B'\tilde{B}'^{\Delta} \\ &= BB' + (\widetilde{BB'})^{\Delta} + (B + B')(\widetilde{B + B'})^{\Delta} \in Z. \end{aligned}$$

Покажем, что $Bp_2 + p_3 \in Z$. В самом деле

$$\begin{aligned} Bp_2 + p_3 &= B(\widetilde{BB'})^{\Delta} + BB'(\tilde{B} + \tilde{B}')^{\Delta} + B'(\widetilde{BB'})^{\Delta} = \\ &= (B + B')(\widetilde{BB'})^{\Delta} + (BB')(\tilde{B} + \tilde{B}')^{\Delta}. \end{aligned}$$

Проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 2, тогда имеем $Bp_2 + p_3 \in Z$.

Уравнение Сильвестра (16) приводится к виду (10). Если элемент A_1 имеет обратный, то решение уравнения Сильвестра записывается в виде

$$X = A_1^{-1}B_1 = \frac{A_1'(\widetilde{A_1A_1'})^{\Delta}(Le_0 - Ke_\tau)B_1}{L^2 - K^2}, L^2 - K^2 \neq 0.$$

Выводы. В статье исследуется уравнение Сильвестра для матриц второго порядка с действительными или комплексными коэффициентами. Для алгебр Клиффорда четной размерности $\mathbf{R_{4,0}}, \mathbf{R_{1,3}}$, центр которых состоит из действительных чисел, дается алгоритм нахождения обратных элементов. Нахождение обратных элементов тесно связано с понятием делителей нуля в этих алгебрах. Обратный элемент находится с помощью сопряжения Клиффорда. Метод нахождения обратного элемента применяется для решения уравнения Сильвестра, при этом используется четностное сопряжение, сопряжение реверс и сопряжение Клиффорда.

Центр нечетной алгебры Клиффорда $\mathbf{R}_{5,0}$ состоит из двойных чисел. При нахождении обратного элемента нельзя применять сопряжение Клиффорда. Найдено сопряжение, с помощью которого можно применять алгоритм нахождения обратного элемента в алгебре Клиффорда $\mathbf{R}_{5,0}$. Метод нахождения обратного элемента применяется для решения уравнения Сильвестра, которое, в частности, используется для обеспечения робастности пьезопривода с использованием метода управляемой относительной интервальности [1].

Литература

1. *Быстров С.В., Слита О.В., Сударчиков С.А., Ушаков А.В.* Обеспечение робастности пьезопривода с использованием метода управляемой относительной интервальности // Известия вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 534–541.

2. *Иваницкий А.Ю., Кузнецов С.П., Мочалов В.В., Чуев В.П.* Обратные элементы и делители нуля в алгебрах Клиффорда и Грассмана // Вестник Чувашского университета. 2017. № 3. С. 207–221.

3. *Марчук Н.Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009, 304 с.

4. *Марчук Н.Г., Широков Д.С.* Теория алгебр Клиффорда и спиноров. М.: Красанд, 2020. 560 с.

5. *Bayro-Corrochano E.* Geometric Algebra Applications. Springer, 2019, vol. I, 742 p.

6. *Dargys A., Acus A.* A note on solution of ax+xb=c by Clifford algebras. Available at: https://arxiv.org/pdf/1902.09194.pdf.

7. *Hildenbrand D.* Foundations of Geometric Algebra Computing, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1479(1), pp. 27–30. DOI: 10.1063/1.4756054.

8. Lounesto P. Clifford algebras and spinors. In: Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics. Dordrecht, Springer Netherlands, 2001, pp. 25–37.

9. *Shirokov D.* Basis-free solution to Sylvester equation in Clifford algebra of arbitrary dimension. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2021, vol. 31, no. 5, p. 70.

10. *Shirokov D.S.* On computing the determinant, other characteristic polynomial coefficients, and inverse in Clifford algebras of arbitrary dimension. *Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 40, no. 5, p. 173.

КУЗНЕЦОВ СЕРГЕЙ ПЕТРОВИЧ – старший преподаватель кафедры дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (chevchenka@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6491-2223).

МОЧАЛОВ ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (m622573@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8136-3932).

ЧУЕВ ВАСИЛИЙ ПЕТРОВИЧ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (570065@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1490-0929).

Sergey P. KUZNETSOV, Vladimir V. MOCHALOV, Vasiliy P. CHUEV

ALGORITHM FOR FINDING THE INVERSE ELEMENTS AND SOLUTION OF THE SILVESTER EQUATION IN THE CLIFFORD ALGEBRAS $\boldsymbol{R_{4,0}, R_{1,3}, R_{5,0}}$

Key words: *real Clifford algebra, conjugation in Clifford algebras, zero divisors, inverse element, Sylvester equation, robustness, piezodrive.*

The purpose of the work *is to find an algorithm for finding inverse elements in the Clifford algebras* $\boldsymbol{R_{4,0}, R_{1,3}, R_{5,0}}$ *and to solve the nonlinear Sylvester equation* $AX + XB = C$.

Materials and methods. *Using the basic conjugation operations in Clifford algebras, finding an algorithm for finding inverse elements. Application of this algorithm to solve the Sylvester equation.*

Results of the work. *In Clifford algebras* $\boldsymbol{R_{4,0}}, \boldsymbol{R_{1,3}}, \boldsymbol{R_{5,0}}$, *which have a great application in physics, a method for finding inverse elements and equations for finding zero divisors were found. The found algorithm is used to solve the Sylvester equation. For Clifford algebras of even dimension* $\boldsymbol{R_{4,0}}, \boldsymbol{R_{1,3}}$ *an algorithm for finding inverse elements is given. Finding inverse elements is closely related to the concept of zero divisors in these algebras. The inverse element method is used to solve the Sylvester equation, using even conjugation, reverse conjugation and Clifford conjugation. For the odd Clifford algebra* $\boldsymbol{R_{5,0}}$, *a conjugation is found that can be used to apply the algorithm for finding the inverse element. The method of finding the inverse element is used to solve the Sylvester equation, which, in particular, is used to ensure the robustness of the piezodrive using the controlled relative interval method.*

Findings*. An algorithm for finding inverse elements is constructed and the Sylvester equation is solved in the Clifford algebras* $\boldsymbol{R_{4,0}}, \boldsymbol{R_{1,3}}, \boldsymbol{R_{5,0}}$.

References

1. Bystrov S.V., Slita O.V., Sudarchikov S.A., Ushakov A.V. *Obespechenie robastnosti p'ezoprivoda s ispol'zovaniem metoda upravlyaemoi otnositel'noi interval'nosti* [Ensuring robustness of a piezodrive using the controlled relative interval method]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie*, 2016, vol. 59, no. 7, pp. 534–541.

2. Ivanickij A.Ju., Kuznecov S.P., Mochalov V.V.,Chuev V.P. *Obratnye elementy i deliteli nulya v algebrah Klifforda i Grassmana* [Inverse elements and zero divisors in Clifford and Grassmann algebras]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2017, no. 3, pp. 207–221.

3. Marchuk N.G., *Uravnenija teorii polja i algebry Klifforda* [Field theory and Clifford algebra equations]. Izhevsk, 209, 304 p.

4. Marchuk N.G., Shirokov D.S. *Teoriya algebr Klifforda i spinorov* [Theory of Clifford algebras and spinors]. Moscow, Krasand Publ., 2020, 560 p.

5. Bayro-Corrochano E. Geometric Algebra Applications. Springer, 2019, vol. I, 742 p.

6. Dargys A., Acus A. A note on solution of ax+xb=c by Clifford algebras. Available at: https://arxiv.org/pdf/1902.09194.pdf.

7. Hildenbrand D. Foundations of Geometric Algebra Computing, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1479(1), pp. 27–30. DOI: 10.1063/1.4756054.

8. Lounesto P. Clifford algebras and spinors. In: Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics. Dordrecht, Springer Netherlands, 2001, pp. 25–37.

9. Shirokov D. Basis-free solution to Sylvester equation in Clifford algebra of arbitrary dimension. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2021, vol. 31, no. 5, p. 70.

10. Shirokov D.*S.* On computing the determinant, other characteristic polynomial coefficients, and inverse in Clifford algebras of arbitrary dimension. *Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 40, no. 5, p. 173.

SERGEY P. KUZNETSOV – Senior Lecturer, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (chevchenka@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6491-2223).

VLADIMIR V. MOCHALOV – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (m622573@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8136-3932).

VASILIY P. CHUEV – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (570065@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1490-0929).

Формат цитирования: *Кузнецов С.П., Мочалов В.В., Чуев В.П.* Алгоритм нахождения обратных элементов и решение уравнения Сильвестра в алгебрах Клиффорда $R_{4,0}, R_{1,3}, R_{5,0}$ // Вестник Чувашского университета. – 2023. – № 4. – С. 109–119. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-4-109-119.