DOI: 10.47026/1810-1909-2023-2-32-40
УДК: [517.956.225:517.982.43]:621.313-465
ББК: В161.68:К500.131

А.А. АФАНАСЬЕВ, Н.Н. ИВАНОВА

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Ключевые слова: *трехмерная аналитическая модель, электрическая машина, полый цилиндр конечной длины, уравнение Лапласа, метод разделения переменных Фурье, собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля.*

Физической моделью многих электротехнических объектов служит полый цилиндр конечной длины. В качестве основы для построения аналитических моделей электрических машин используются линейные уравнения математической физики, являющиеся решением трехмерного дифференциального уравнения Лапласа в частных производных, которое широко применяется при аналитических расчетах.

Цель исследования *– решение трехмерного дифференциального уравнения Лапласа для полого цилиндра конечной длины, которое может быть адаптировано для электромагнитного расчета электромеханических устройств с активными частями цилиндрической формы.*

Материалы и методы. *Для решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат использовался метод разделения переменных Фурье. Для получения нетривиального решения уравнения использовались собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Краевые задачи Дирихле, Неймана, задачи смешанного типа для полых цилиндров адаптированы к электромагнитному расчету электромеханических устройств, имеющих активные части цилиндрической формы.*

Результаты. *Рассмотрено уравнение Лапласа, заданное в цилиндрической системе координат, на основе которого для нахождения собственных функций составлено уравнение Штурма–Лиувилля с нулевыми начальными значениями. Полное решение уравнения Лапласа с заданными краевыми условиями получено как сумма решений двух отдельных задач Дирихле с разными краевыми условиями.*

Выводы. *Полученное аналитическое выражение может использоваться в качестве математической основы для построения трехмерных аналитических моделей электрических машин с активными частями цилиндрической формы и проведения электромагнитных расчетов соответствующих электромеханических устройств.*

Физической моделью многих электротехнических объектов служит полый цилиндр конечной длины. В качестве основы для построения аналитических моделей электрических машин используются линейные уравнения математической физики, являющиеся решением трехмерного дифференциального уравнения Лапласа в частных производных, которое широко применяется при аналитических расчетах [8–10].

Цель исследования – решение трехмерного дифференциального уравнения Лапласа для полого цилиндра конечной длины, которое может быть адаптировано для электромагнитного расчета электромеханических устройств с активными частями цилиндрической формы.

Материалы и методы. В статье рассмотрено решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат методом разделения переменных Фурье

[1–7]. Для получения нетривиального решения уравнения использовались собственные функции задачи Штурма–Лиувилля [1]. Краевые задачи Дирихле, Неймана, задачи смешанного типа для полых цилиндров адаптированы к электромагнитному расчету электромеханических устройств, имеющих активные части цилиндрической формы.

Результаты исследования. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0, \tag{1}$$

где $a \le r \le b$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le z \le l$ (рис. 1).

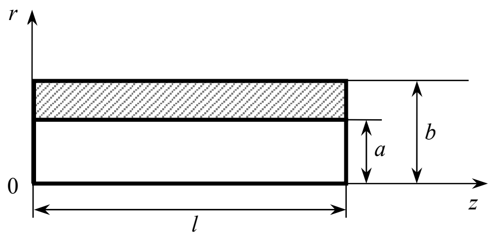

Рис. 1. Продольный разрез полого цилиндра

Собственные функции полого цилиндра конечной длины находятся из решения уравнения Штурма–Лиувилля с нулевыми начальными значениями, которое применительно к формуле (1) описывается выражением

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{2}$$

где

$$-\beta_1 u_{r=a} = 0;\ \ \beta_2 u_{r=b} = 0;\ \ u_{z=0} = 0;\ \ u_{z=l} = 0; \tag{3}$$

$\beta_i > 0$ (i = 1, 2) – постоянные; λ – собственное число.

Решение уравнения Штурма–Лиувилля (2) с начальными условиями (3) имеет вид

$$u(r,\varphi,z) = Q(r,\varphi)Z(z),$$

где $Q(r, \varphi)$ – собственные функции кругового кольца $a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $Z(z)$ – собственные функции отрезка $0 \le z \le l$.

Нахождение собственных функций и собственных значений. Решение уравнения (1) с краевыми условиями

$$u_{r=a} = f_1(\varphi,z);\ \ u_{r=b} = f_2(\varphi,z);$$
$$u_{z=0} = f_3(r,z);\ \ u_{z=l} = f_4(r,z)$$

ввиду линейности задачи будем находить как сумму решений двух отдельных задач Дирихле с разными краевыми условиями:

$$\Delta u = 0;\ \ u_{r=a} = 0;\ \ u_{r=b} = 0;\ \ u_{z=0} = f_3(r,z);\ \ u_{z=l} = f_4(r,z); \tag{4}$$

$$\Delta u = 0;\ \ u_{r=a} = f_1(\varphi,z);\ \ u_{r=b} = f_2(\varphi,z);\ \ u_{z=0} = 0;\ \ u_{z=l} = 0. \tag{5}$$

Решение первой части задачи Дирихле. Решение первой задачи (4) ищем в виде выражения

$$u(r,\varphi,z)=Q(r,\varphi)Z(z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{6}$$

которое, очевидно, удовлетворяет начальным условиям

$$u_{r=a}=0;$$
$$u_{r=b}=0.$$

После подстановки (6) в исходное уравнение Лапласа (1) и разделения переменных получим

$$\frac{\Delta_2 Q(r,\varphi)}{Q(r,\varphi)}=-\frac{\frac{dZ(z)}{dz}}{Z(z)}=-\lambda, \tag{7}$$

где $\Delta_2 Q(r,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$ – двухмерный фрагмент уравнения Лапласа в полярных координатах; λ – постоянная разделения переменных.

Формулу (7) можно представить в виде двух уравнений:

$$\Delta_2 Q(r,\varphi)+\lambda Q(r,\varphi)=0 \tag{8}$$

при $a\le r\le b$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $u_{r=b}=0$, $u_{r=b}=0$;

$$\frac{dZ(z)}{dz}-\lambda Z(z)=0 \tag{9}$$

при $0\le z\le l$.

Уравнение (8) есть уравнение Штурма–Лиувилля для кругового кольца. После разделения переменных из (8) получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(\lambda r^2-\nu)R=0,\ a\le r\le b, \tag{10}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\nu\Phi=0,\ 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{11}$$

где ν – постоянная разделения.

Из уравнения (11) следует, что собственные значения ν и собственные функции Φ имеют вид [2]

$$\nu=\nu_n=n^2\quad (n=0,\ 1,\ 2,...);$$

$$\Phi=\Phi_n(\varphi)\equiv\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases}$$

Общее решение уравнения Бесселя (10) при $\nu=n^2$ $(n=0,\ 1,\ 2,...)$ равно

$$R(r)=C_1J_n(\sqrt{\lambda}r)+C_2N_n(\sqrt{\lambda}r), \tag{12}$$

где $J_n(\sqrt{\lambda}r)$, $N_n(\sqrt{\lambda}r)$ – соответственно функции Бесселя первого и второго рода (рис. 2–3) [2, 4–6].

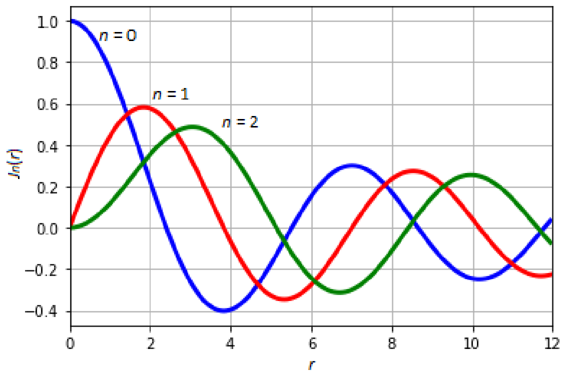

Рис. 2. График функции Бесселя первого рода

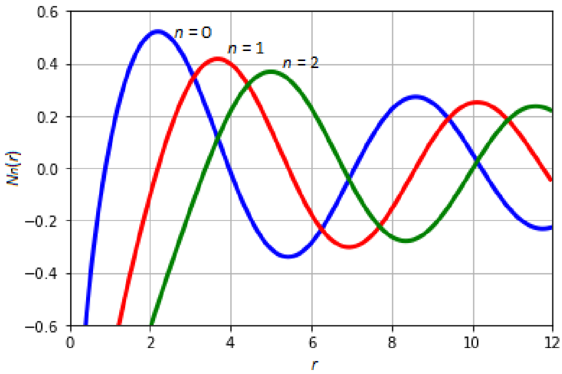

Рис. 3. График функции Бесселя второго рода

С учетом граничных условий

$$u_{r=a} = 0\,;\ u_{r=b} = 0$$

из выражения (12) получим однородную систему линейных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 J_n(\sqrt{\lambda}a) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}a) = 0; \\ C_1 J_n(\sqrt{\lambda}b) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda}b) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

решение которой будет нетривиальным, если

$$\begin{vmatrix} J_n(\sqrt{\lambda}a) & N_n(\sqrt{\lambda}a) \\ J_n(\sqrt{\lambda}b) & N_n(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{J_n(\sqrt{\lambda}a)}{J_n(\sqrt{\lambda}b)} = \frac{N_n(\sqrt{\lambda}a)}{N_n(\sqrt{\lambda}b)}. \tag{14}$$

Из этого уравнения (14) находим собственное значение $\lambda = \lambda_k^{(n)}$, соответствующее порядку n и корню k цилиндрических функций J_n и N_n.

С учетом (14) из (13) следует, что

$$C_2 = -C_1 \frac{J_n(\sqrt{\lambda} a)}{N_n(\sqrt{\lambda} a)}.$$

После подстановки в (13) полученного выражения для C_2 и выбора $C_1 = N_n(\sqrt{\lambda} a)$ решение уравнение Бесселя (12) для $R(r)$ примет вид

$$R(r) = R_{nk}(r) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r) N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a) - N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a).$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (9) получено в виде

$$Z(z) = A \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, z}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l} + B \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,(l - z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l}.$$

Таким образом, первая часть (4) краевой задачи имеет следующие частные решения:

$$u_{nk}(r,\varphi,z) = Q_{nk}(r,\varphi) \left[A_{nk} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, z}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l} + B_{nk} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,(l - z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l} \right].$$

Полное решение первой части (4) запишется в виде разложения по этим частным решениям[1]:

$$\begin{aligned} u_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ & \left[J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r) N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a) - N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a) \right] \times \\ & \times \left[A_{nk} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, z}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l} + B_{nk} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,(l - z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, l} \right] \cos n\varphi \Bigg\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ввиду равенства граничных условий на торцах полого цилиндра

$$u_{z=0} = u_{z=l},$$

т.е. при $f_3(r,z) = f_4(r,z)$, имеем $A_{nk} = B_{nk}$ [3].

Решение второй части задачи Дирихле. Для решения краевой задачи (5) построим систему частных решений уравнения Лапласа в виде

$$u(r,\varphi,z) = Q(r,\varphi) Z(z) \neq 0, \tag{16}$$

удовлетворяющих однородным граничным условиям

$$u_{z=0} = 0, \quad u_{z=l} = 0.$$

Подставляя (16) в уравнение Лапласа (1) и разделяя переменные, как делалось в первой части задачи Дирихле, выражения для нахождения $Z(z)$ и $Q(r, \varphi)$ запишем в виде

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda Z = 0, \tag{17}$$

при $0 \le z \le l, \quad Z(0) = Z(l) = 0, \quad Z(z) \neq 0;$

---

[1] Применительно к математическим моделям электромеханических устройств можно ограничиться использованием только одной тригонометрической функции $\cos n\varphi$ или $\sin n\varphi$.

$$\Delta_2 Q(r,\varphi) - \lambda Q(r,\varphi) = 0 \qquad (18)$$

при $a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Уравнение (17) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля для отрезка. Её собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{array}{l} \lambda = \lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2, \\ Z = Z_k(z) = \sin\dfrac{\pi k}{l} z \end{array}.$$

Частные решения (18) также найдём методом разделения переменных. Пусть

$$Q(r,\varphi) = R(r)\varPhi(\varphi).$$

Подставив это выражение в (18), после разделения переменные получим

$$\frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} \equiv -\frac{\dfrac{d^2\varPhi(\varphi)}{d\varphi^2}}{\varPhi(\varphi)} = \nu,$$

где ν – постоянная разделения.

Отсюда следует, что обыкновенные дифференциальные уравнения для нахождения $\varPhi(\varphi)$ и $R(r)$ имеют вид

$$\frac{d^2\varPhi}{d\varphi^2} + \nu\varPhi = 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$\varPhi(\varphi) \equiv \varPhi(\varphi + 2\pi),$$

где $\nu = \nu_n = n^2$ $(n = 0,\ 1,\ 2,...)$, $\varPhi = \varPhi_n(\varphi) \equiv \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - (\lambda r^2 + \nu)R = 0,\ a \le r \le b. \qquad (19)$$

Уравнение (19) есть уравнение Бесселя с чисто мнимым аргументом. Его решение запишется так:

$$R(r) = R_{nk}(r) = C_{nk} I_n(\sqrt{\lambda_k} r) + D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k} r),$$

где $I_n(\sqrt{\lambda_k} r), K_n(\sqrt{\lambda_k} r)$ – модифицированные цилиндрические функции: соответственно Бесселева функция первого рода (функция Инфельда) (рис. 4), Бесселева функция второго рода (функция Макдональда) (рис. 5) [4].

Следовательно, система частных решений (16) имеет вид

$$u_{nk}(r,\varphi,z) = \left[C_{nk} I_n(\sqrt{\lambda_k} r) + D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k} r)\right]\sin\sqrt{\lambda_k} z \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases}$$

Полное решение второй части (5) запишется в виде разложения по этим частным решениям

$$u_2(r,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[C_{nk} I_n(\sqrt{\lambda_k} r) + D_{nk} K_n(\sqrt{\lambda_k} r)\right]\sin\sqrt{\lambda_k} z \cos n\varphi\right\}. \qquad (20)$$

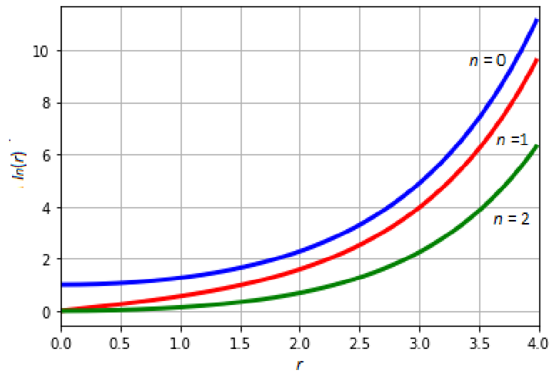

Рис. 4. График модифицированной функции Бесселя первого рода (функции Инфельда)

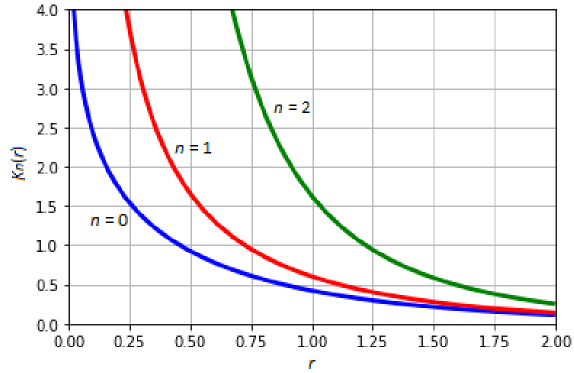

Рис. 5. График модифицированной функции Бесселя второго рода (функции Макдональда)

Полное решение уравнения Лапласа. Решение $u(r,\varphi,z)$ исходного уравнения Лапласа (1) с краевыми условиями

$$u_{r=a}=f_1(\varphi,z)\,;\;\; u_{r=b}=f_2(\varphi,z)\,;\;\; u_{z=0}=f_3(r,z)\,;\;\; u_{z=l}=f_4(r,z)$$

будет равно сумме полученных решений первой и второй частей задачи Дирихле, представленных выражениями (15) и (20):

$$u(r,\varphi,z)=u_1(r,\varphi,z)+u_2(r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\cos n\varphi\cdot\Big[J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r)N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)-N_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r)J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)\Big]\times$$

$$\times\left[A_{nk}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}l}+B_{nk}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k^{(n)}}l}\right]+$$

$$+\Big[C_{nk}I_n(\sqrt{\lambda_k}r)+D_{nk}K_n(\sqrt{\lambda_k}r)\Big]\sin\sqrt{\lambda_k}z\Bigg\}.$$

Выводы. В статье предложено решение трехмерного дифференциального уравнения Лапласа в частных производных с использованием метода разделения переменных. Решение уравнения представлено в виде суммы решений двух задач Дирихле с разными краевыми условиями. Полученное аналитическое выражение может использоваться в качестве математической основы для построения трехмерных аналитических моделей электрических машин с активными частями цилиндрической формы и проведения электромагнитных расчетов соответствующих электромеханических устройств.

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 350 с.

2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 304 с.

3. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

4. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965. 423 с.

5. Функции Бесселя / сост.: В.И. Зубов. М.: МФТИ, 2007. 51 с.

6. Справочник по специальным функциям / пер. с англ. под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

7. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 384 с.

8. *Jiang Q., Zhou Z., Yang F.* The transient response of hollow electrostrictive cylinder subjected to the electrical shock. *Arch Appl Mech,* 2021, vol. 91, pp. 4039–4051. DOI: https://doi.org/10.1007/-s00419-021-01992-4.

9. *Li H., Hu X., Cui L.* Magnetic Field Analysis for the Permanent Magnet Spherical Motor with SMC Core. In IEEE Transactions on Magnetics, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 1–9. DOI: 10.1109/TMAG.2023.3244617.

10. *Shuaiping Guo, Xinming Fan, Kuidong Gao, Hongguang Li.* Precision controllable Gaver–Wynn–Rho algorithm in Laplace transform triple reciprocity boundary element method for three dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, vol. 114, pp. 166–177.

АФАНАСЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (afan39@mail.ru).

ИВАНОВА НАДЕЖДА НИКОЛАЕВНА – кандидат технических наук, доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (niva_mail@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7130-8588).

Aleksandr A. AFANASYEV, Nadezhda N. IVANOVA

SOLUTION OF THE LAPLACE EQUATION BY THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES FOR A LENGTH HOLLOW CYLINDER

Key words: *three-dimensional analytical model, electric machine, hollow cylinder of finite length, Laplace equation, Fourier variable separation method, eigenfunctions and eigenvalues of the Sturm–Liouville problem.*

The physical model of many electrical objects is a hollow cylinder of finite length. As a basis for constructing analytical models of electrical machines, linear equations of mathematical physics are used. They are the solution of the Laplace three-dimensional partial differential equation, which is widely used in analytical calculations.
The purpose of the study *is to solve the Laplace three-dimensional differential equation for a hollow cylinder of finite length, which can be adapted for the electromagnetic calculation of electromechanical devices with cylindrical active parts.*

Materials and methods. *To solve the Laplace equation in a cylindrical coordinate system, the Fourier variable separation method was used. To obtain a non-trivial solution of the equation, eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem were used. Dirichlet, Neumann boundary value problems of the mixed type for hollow cylinders are adapted to the electromagnetic calculation of electromechanical devices having cylindrical active parts.*

The results of the study. *The Laplace equation given in a cylindrical coordinate system is considered, on the basis of which the Sturm–Liouville equation with zero initial values is compiled to find eigenfunctions. The complete solution of the Lapalace equation with given boundary conditions is obtained as the sum of the solutions of two separate Dirichlet problems with different boundary conditions.*

Findings. *The obtained analytical expression can be used as a mathematical basis for constructing three-dimensional analytical models of electrical machines with cylindrical active parts and carrying out electromagnetic calculations of the corresponding electromechanical devices.*

References

1. Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Zadachi po matematicheskoi fizike* [Problems in mathematical physics]. Moscow, Moskow University Publ., 1998, 350 p.

2. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Linear Ordinary Differential Equations]. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 304 p.

3. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p.

4. Kuznetsov D.S. *Spetsial'nye funktsii* [Special features]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965, 423 p.

5. Zubov V.I., comp. *Funktsii Besselya* [Bessel functions]. Moscow, 2007, 51 p.

6. Abramowitz M., Stegun I.A., eds. Handbook of mathematical functions with formular, graphs and mathematical tables. National Bureau of Standards, Washington, 1964, 470 p. (Russ. ed.: *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p.).

7. Farlow S.J. Partial differential egnations for scientists and engineers. Wileu, 1982 (Russ. ed.: *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow, Mir Publ., 1985, 384 p.).

8. *Jiang Q., Zhou Z., Yang F.* The transient response of hollow electrostrictive cylinder subjected to the electrical shock. *Arch Appl Mech,* 2021, vol. 91, pp. 4039–4051. DOI: https://doi.org/10.1007/-s00419-021-01992-4.

9. *Li H., Hu X., Cui L.* Magnetic Field Analysis for the Permanent Magnet Spherical Motor with SMC Core. In IEEE Transactions on Magnetics, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 1–9. DOI: 10.1109/TMAG.2023.3244617.

10. *Shuaiping Guo, Xinming Fan, Kuidong Gao, Hongguang Li.* Precision controllable Gaver–Wynn–Rho algorithm in Laplace transform triple reciprocity boundary element method for three dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, vol. 114, pp. 166–177.

ALEKSANDR A. AFANASYEV – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (afan39@mail.ru).

NADEZHDA N. IVANOVA – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical and Hardware Support of Information Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (niva_mail@mail.ru; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7130-8588).

Формат цитирования: *Афанасьев А.А., Иванова Н.Н.* Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных для полого цилиндра конечной длины // Вестник Чувашского университета. – 2023. – № 2. – С. 32–40. DOI: 10.47026/1810-1909-2023-2-32-40.