

Тригонометрические уравнения с отбором корней. Задача №12 ЕГЭ

Докладчик:

Васильева

Елена

Вениаминовна



Содержание:

1. Введение.
2. Основные тригонометрические формулы.
3. Тригонометрические уравнения.
Решение и оформление.
4. Отбор корней. Решение и оформление.
5. Заключение и источники.

1. Введение.

Тригонометрия – один из древнейших разделов математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их применение в различных науках.

2. Основные тригонометрические формулы.

1. Понятие тригонометрического круга и принцип работы с ним.
2. Знаки тригонометрических функций.
3. Перевод градусной меры в радианную и наоборот.
4. Значения тригонометрических функций в ключевых углах.
5. Формулы приведения.
6. Формулы сложения.
7. Формулы двойного угла.
8. Формулы преобразования суммы или разности.

3. Тригонометрические уравнения. Решение и оформление.

Основная идея – с помощью различных математических преобразований от данного уравнения перейти к простейшим тригонометрическим уравнениям, решения которых известны.

Простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет корней, если } |a| > 1; \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z, \text{ если } |a| \leq 1. \end{cases}$$

В большинстве задач удобнее решение записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{нет корней, если } |a| > 1; \\ x_1 = \arcsin a + 2\pi k, \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad k, n \in Z, \text{ если } |a| \leq 1. \end{cases}$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{нет корней, если } |a| > 1; \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ если } |a| \leq 1. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Критерии оценки задачи 12 ЕГЭ:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Пример 1 (ЕГЭ-2021, 2020, 2019):

а)
$$2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$$

Решение:

1 шаг – применение формул приведения.

Исходное уравнение преобразуем к следующему виду:

$$2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$$

2 шаг – замена переменных или сразу же решение квадратного уравнения.

Пусть $\sin x = t, t \in [-1;1]$

Тогда уравнение примет вид: $2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$

$$D = (3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 18 - 16 = 2 = (\sqrt{2})^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1;1], \\ -\sqrt{2} \notin [-1;1] \end{cases}$$

Шаг 3 – обратная замена и решение простейшего тригонометрического уравнения.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

Пример 2 (ЕГЭ-2017):

$$6\log_8^2(\cos x) - 5\log_8(\cos x) - 1 = 0$$

Решение:

Шаг 1 – сделаем замену $\log_8(\cos x) = t$

Получим квадратное уравнение: $6t^2 - 5t - 1 = 0$

$$\Rightarrow t = 1, t = -\frac{1}{6}$$

Шаг 2 – обратная замена и решение
логарифмических уравнений:

$$\begin{cases} \log_8(\cos x) = 1, \\ \log_8(\cos x) = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 8, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt[6]{8}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Шаг 3 – решение тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 8 > 1 - \text{корней нет} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Отбор корней. Решение и оформление.

Способы отбора корней:

1. Метод перебора.
2. Решение неравенств.
3. Метод круга.
4. Использование графиков.
5. Использование координатной прямой.

Пример 1 (ЕГЭ-2021):

б) укажите корни этого уравнения,
принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Решение:

Из пункта а) корни уравнения равны:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

1 способ. Метод перебора:

$$k = n = 0, \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{4}; 4\pi \right], \\ x_2 = -\frac{3\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{4}; 4\pi \right] \end{cases}$$

$$k = n = 1, \begin{cases} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = 1,75\pi \notin [2,5\pi; 4\pi], \\ x_2 = 2\pi - \frac{3\pi}{4} = 1,25\pi \notin [2,5\pi; 4\pi] \end{cases}$$

$$k = n = 2, \begin{cases} x_1 = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} = 3,75\pi \in [2,5\pi; 4\pi], \\ x_2 = 4\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{4} = 3,25\pi \in [2,5\pi; 4\pi] \end{cases}$$

$$k = n = 3, \begin{cases} x_1 = 6\pi - \frac{\pi}{4} = 5,75\pi \notin [2,5\pi; 4\pi], \\ x_2 = 6\pi - \frac{3\pi}{4} = 5,25\pi \notin [2,5\pi; 4\pi] \end{cases}$$

Окончательно: $\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

2 способ. Решение неравенств:

$$\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 5\pi, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq 5, k \in \mathbb{Z} \quad \left| +\frac{1}{4} \right.$$

$$\frac{11}{4} \leq 2k \leq \frac{21}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad | : 2$$

$$\frac{11}{8} = 1\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq 5\pi, n \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$\frac{5}{2} \leq -\frac{3}{4} + 2n \leq 5, n \in \mathbb{Z} \quad \left| +\frac{3}{4} \right.$$

$$\frac{13}{4} \leq 2n \leq \frac{23}{4}, n \in \mathbb{Z} \quad | : 2$$

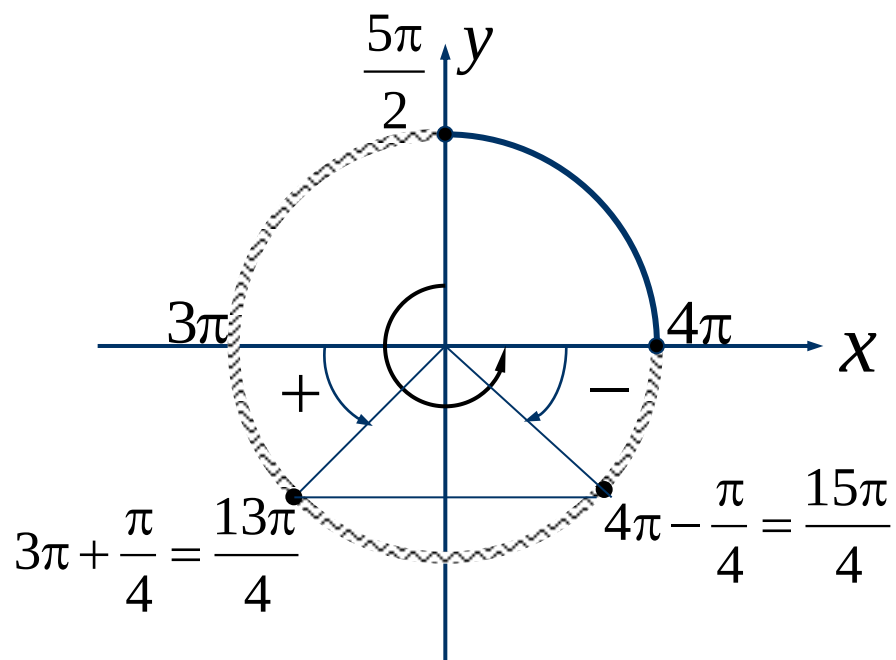
$$\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8} \leq n \leq \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}, n \in \mathbb{Z}$$

Итак, примем:

$$k = n = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} \\ x_2 = 4\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{4} \end{cases}$$

Окончательно: $\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

3 способ. Метод круга:



Окончательно:

$$\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$$

4 способ. Использование графиков.

Из пункта а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Построим графики и найдем точки пересечения следующих функций:

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

5. Использование координатной прямой.

На числовой прямой отметим промежуток и корни с учетом периода.

5. Заключение и источники

1. www.fipi.ru – федеральный институт педагогических измерений.
2. www.alexlarin.net.
3. www.ege.sdamgia.ru – Решу ЕГЭ.
4. И.В.Ященко. ЕГЭ 2021. Математика. Профильный уровень.
5. www.academyege.ru – проверка знаний в он-лайн тестировании.
6. Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации по математике.



Спасибо за внимание!