DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-65-72

УДК 621.3.025.3
ББК 31.27-01

А.В. КОРОВИН, И.В. АЛЕКСАНДРОВ

# КООРДИНАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРЕХФАЗНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОНОВ

***Ключевые слова:*** *трехфазные системы переменного тока, преобразование E. Clarke и R.H. Park, гиперкомплексное пространство, кватернионы токов и напряжений, координаты состояния.*

*Среди всего многообразия современных подходов к математическому описанию процессов передачи, распределения, преобразования и генерации электрической энергии переменного тока представление трехфазных переменных в форме чисто мнимого кватерниона, расположенного в отдельном подпространстве четырехмерного гиперкомплексного пространства, позволяет по отношению к общепринятым методам анализа линейных цепей, например симметричных составляющих с выделением прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз по основной гармонике, более полно учесть особенности энергопотребления, особенно при наличии искажений в мгновенной форме гармонических сигналов. Присущее данной некоммутативной алгебре разделение кватерниона на скалярную (вещественную) и векторную (мнимую) части дает возможность существенно упростить последующую аналитическую процедуру синтеза управляющих воздействий в силовых преобразовательных устройствах активной фильтрации и электропитания автономных нагрузок произвольного вида, включая однофазную конфигурацию, за счет выделения из его состава отдельных компонент, отвечающих как за амплитудно-фазовую асимметрию, так и за нелинейность системы.*

*Основные алгоритмические принципы организации управляющих структур в составе трехфазных комплексов различного функционального назначения, как правило, базируются на преобразовании заданий (уставок) и текущих значений измеренных токов и напряжений в координаты состояния d, q, o, которые получаются путем поворота плоскости трехмерного пространства на заданный угол. При этом расчетные соотношения для численного определения трансформированных путем вращения исходных переменных в кватернионном базисе являются функцией только четырех кинематических параметров, что при прочих равных условиях приводит к упрощению закона управления по отношению к традиционному векторно-матричному подходу, использующему девять направляющих косинусов с 6 уравнениями связей. В этой связи особую актуальность приобретают прикладные задачи реализации линейных преобразований E. Clarke и R.H. Park в терминах четырехмерных гиперкомплексных чисел, в том числе с соблюдением дополнительного требования инвариантности скалярных частей после выполненного перехода, теоретическим и практическим вопросам построения которых посвящена данная статья.*

**Введение.** В настоящее время в задачах анализа и синтеза трехфазных систем переменного тока, включающих в себя законы управления активными силовыми фильтрами высших гармоник [12] и полупроводниковыми инверторами при электропитании автономных потребителей от возобновляемых источников энергии [6], математическое описание электромеханических процессов [14] и алгоритмы идентификации аварийных режимов работы [8] асинхронных электрических машин, координатные преобразования исходного базиса фазных переменных [13] и т.д., широко используются четырехмерные гиперкомплексные числа (кватернионы), практическое применение которых позволяет выполнить декомпозицию общего потока электрической энергии на «полезную» и «неэффективную» составляющие без каких-либо ограничений на конфигурацию цепей и конкретный вид электроприемника [3], снизить вычислительную нагрузку на микропроцессорные программно-аппаратные средства [11] и т.п. При этом для обеспечения требования нулевой статической ошибки по управляемому выходу необходимо осуществлять синтез регуляторов во вращающейся системе координат $d$, $q$, $o$ [2]. В этой связи данная статья посвящена теоретическим вопросам построения координатных преобразований E. Clarke [9] и R.H. Park [15] в четырехмерном пространстве, образованного одной вещественной и тремя мнимыми единицами, с произвольной нормой кватерниона перехода.

**Алгебра кватернионов.** Математический аппарат некоммутативной ассоциативной алгебры кватернионов, введенный в анализ У.Р. Гамильтоном (William Rowan Hamilton) в 1843 г. [10], представляет собой расширение функции комплексной переменной на четырёхмерное гиперкомплексное пространство H, представленное в следующем виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{q}_1 + \lambda_2\mathbf{q}_2 + \lambda_3\mathbf{q}_3 \,,$$

где $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ – вещественные коэффициенты; $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, $\mathbf{q_3}$ – мнимые единицы, подчиняющиеся 9 правилам произведения

$$\begin{gathered}\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3 = -\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3, \\ \mathbf{q}_1^2 = \mathbf{q}_2^2 = \mathbf{q}_3^2 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3 = -1.\end{gathered} \tag{1}$$

В качестве наглядной иллюстрации некоммутативных правил произведения $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, $\mathbf{q_3}$, на рисунке изображена круговая диаграмма, из которой следует, что при движении по ходу часовой стрелки получается положительная третья мнимая единица, а при обратном направлении происходит инверсия знака.

В составе $\mathbf{\Lambda}$ можно выделить скалярную (действительную) $\mathrm{scal}\mathbf{\Lambda} = \lambda_0$ и векторную (мнимую) $\mathrm{vect}\mathbf{\Lambda}$ части [1, 4, 5]

$$\mathrm{vect}\mathbf{\Lambda} = \lambda_1\mathbf{q}_1 + \lambda_2\mathbf{q}_2 + \lambda_3\mathbf{q}_3 \,,$$

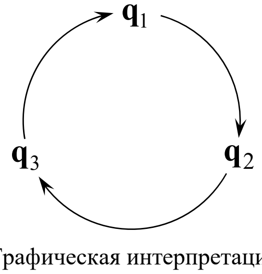
а также по аналогии с комплексными числами модуль

$$\left|\mathbf{\Lambda}\right| = \sqrt{\mathbf{\Lambda}\widehat{\mathbf{\Lambda}}} = \sqrt{\widehat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{\Lambda}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{3}\lambda_k^2} \,,$$

или иначе норму $\left\|\mathbf{\Lambda}\right\| = \left|\mathbf{\Lambda}\right|^2$, сопряженный и обратный кватернион

$$\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \mathrm{scal}\mathbf{\Lambda} - \mathrm{vect}\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{q}_1 - \lambda_2\mathbf{q}_2 - \lambda_3\mathbf{q}_3 \,,$$

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \left\|\mathbf{\Lambda}\right\|^{-1}\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \left|\mathbf{\Lambda}\right|^{-2}\widehat{\mathbf{\Lambda}} \,.$$




Графическая интерпретация произведения мнимых единиц

**Координатные преобразования в четырехмерном гиперкомплексном пространстве** H. Как было указано в водной части статьи, современные алгоритмы управления трехфазными системами переменного тока, как правило, реализуются во вращающейся системе координат $d$, $q$, $o$, благодаря чему удается упростить исходное математическое описание протекающих электромагнитных или электромеханических процессов, а также добиться астатического регулирования многомерного вектора выхода.

При практическом использовании данной алгебры с делением трехфазные переменные принимают вид чисто мнимого кватерниона без скалярной части [7, 11, 12]

$$\mathbf{X}_{abc} = x_a\mathbf{q}_1 + x_b\mathbf{q}_2 + x_c\mathbf{q}_3\,,$$

где $x_a$, $x_b$, $x_c$ – текущие значения токов или напряжений, линейное преобразование которых в координаты состояния 1,2,3 реализуется на основании следующей формулы [4, 6, 14]:

$$\mathbf{X}_{123} = \mathbf{\Lambda}_{123}\mathbf{X}_{abc}\mathbf{\Lambda}_{123}^{-1} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3\,, \tag{2}$$

где $\Lambda_{123}$ – кватернион перехода, причем в частном случае $\|\mathbf{\Lambda}_{123}\| = 1$, нормы исходного $\|\mathbf{X}_{abc}\|$ и трансформированного $\|\mathbf{X}_{123}\|$ чисто мнимых кватернионов равны друг другу.

После выполнения необходимых математических операций в соответствии с постулированными правилами произведения $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ вида (1) можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\left(\left(\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)x_a + 2\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3\right)x_b + 2\left(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2\right)x_c\right),\\
x_2 &= \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\left(2\left(\lambda_2\lambda_1+\lambda_0\lambda_3\right)x_a + \left(\lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)x_b + 2\left(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1\right)x_c\right),\\
x_3 &= \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\left(2\left(\lambda_3\lambda_1-\lambda_0\lambda_2\right)x_a + 2\left(\lambda_3\lambda_2+\lambda_0\lambda\right)x_b + \left(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)x_c\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

В силу изоморфизма (2) по отношению к линейному преобразованию типа «вращения» с неподвижной фиксированной точкой в трехмерном вещественном пространстве $\Re^3$ [1, 3, 5] данный переход также можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{x}_{123} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{x}_{abc} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_{abc}$, $\mathbf{x}_{123}$ – алгебраические векторы-столбцы трехфазных переменных в исходном $a,b,c$ и преобразованном 1,2,3 ортонормированных базисах соответственно; $\mathbf{L}$ – квадратная матрица размерностью 3×3 [1, 4], которая в соответствии с (3) также определяется как

$$\mathbf{L} = \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3\right) & 2\left(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2\right) \\ 2\left(\lambda_2\lambda_1+\lambda_0\lambda_3\right) & \lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2 & 2\left(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1\right) \\ 2\left(\lambda_3\lambda_1-\lambda_0\lambda_2\right) & 2\left(\lambda_3\lambda_2+\lambda_0\lambda_1\right) & \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 \end{bmatrix}.$$

Для получения расчетных соотношений между 9 элементами $a_{11}\ldots a_{33}$ матрицы $\mathbf{L}$ и 4 кинематическими параметрами $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ воспользуемся ее следом

$$\mathrm{tr}\mathbf{L} = a_{11}+a_{22}+a_{33} = \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\left(3\lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2\right) = \|\mathbf{\Lambda}_{123}\|^{-1}\left(4\lambda_0^2-\|\mathbf{\Lambda}\|\right),$$

откуда

$$\lambda_0 = \pm|\mathbf{\Lambda}_{123}|\frac{\sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{L}+1}}{2}, \tag{4}$$

или по аналогии из расчетных соотношений

$$a_{32} - a_{23} = \frac{4\lambda_0\lambda_1}{\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|},\ a_{13} - a_{31} = \frac{4\lambda_0\lambda_2}{\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|},\ a_{21} - a_{12} = \frac{4\lambda_0\lambda_3}{\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|},$$

вещественные коэффициенты при мнимых единицах $\Lambda_{123}$ находятся как [1, 3–5, 14]

$$\lambda_1 = \pm\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|\frac{a_{32}-a_{23}}{4\lambda_0} = \pm|\mathbf{\Lambda}_{123}|\frac{a_{32}-a_{23}}{2\sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{L}+1}}, \tag{5}$$

$$\lambda_2 = \pm\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|\frac{a_{13}-a_{31}}{4\lambda_0} = \pm|\mathbf{\Lambda}_{123}|\frac{a_{13}-a_{31}}{2\sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{L}+1}}, \tag{6}$$

$$\lambda_3 = \pm\|\mathbf{\Lambda}_{123}\|\frac{a_{21}-a_{12}}{4\lambda_0} = \pm|\mathbf{\Lambda}_{123}|\frac{a_{21}-a_{12}}{2\sqrt{\mathrm{tr}\mathbf{L}+1}}. \tag{7}$$

В свою очередь, обратный переход выполняется на основании формулы (2), в которой прямой и обратный кватернионы преобразования меняются местами [3, 6]

$$\mathbf{X}_{abc} = \mathbf{\Lambda}_{123}^{-1}\mathbf{X}_{123}\mathbf{\Lambda}_{123} = x_a\mathbf{q}_1 + x_b\mathbf{q}_2 + x_c\mathbf{q}_3.$$

**Линейные преобразования E. Clarke и R.H. Park.** Далее остановимся более подробно на анализе ортогональных преобразований E. Clarke и R.H. Park в четырёхмерном гиперкомплексном пространстве H, заданных в векторно-матричной форме записи как [13]

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \mathbf{L}_{\alpha\beta o}\mathbf{x}_{abc} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x}_{dqo} = \mathbf{L}_{dqo}\mathbf{x}_{\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_c \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где $\Theta$ – угол поворота плоскости $d$, $q$ относительно неподвижной оси аппликат $o$.

При пространственном расположении фазных переменных $x_a$, $x_b$, $x_c$ в трехмерном ортонормированном базисе гиперкомплексного пространства H, образованного мнимыми единицами с совмещением абсциссы по $\mathbf{q}_1$, оси ординат по $\mathbf{q}_2$ и аппликаты по $\mathbf{q}_3$, равенство (2) принимает следующий вид:

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta o} = \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}\mathbf{X}_{abc}\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}^{-1} = x_\alpha\mathbf{q}_1 + x_\beta\mathbf{q}_2 + x_o\mathbf{q}_3,$$

в котором численные значения вещественных коэффициентов $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}$ с учетом (4)–(7) равны [1, 4, 6, 14]

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}} \approx 0{,}8805\,,\ \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}} \approx 0{,}3647\,,$$

$$\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}} \approx -0{,}2798\,,\ \lambda_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}} \approx 0{,}1159\,,$$

в результате чего становится справедливым [7]

$$x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2x_a - x_b - x_c\right),\ x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_b - x_c\right),\ x_o = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x_a + x_b + x_c\right). \qquad (10)$$

По аналогии при повороте против хода часовой стрелки двухмерного подпространства $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ относительно $\mathbf{q}_3$ на произвольный угол $\Theta$, нормированный кватернион вращения выбирается в следующем виде [3, 4]:

$$\mathbf{\Lambda}_{dqo} = \cos\frac{\Theta}{2} - \sin\frac{\Theta}{2}\mathbf{q}_3\,, \qquad (11)$$

откуда

$$\mathbf{X}_{dqo} = \mathbf{\Lambda}_{dqo}\left(\Theta\right)\mathbf{X}_{\alpha\beta o}\mathbf{\Lambda}_{dqo}^{-1}\left(\Theta\right) = x_d\mathbf{q}_1 + x_q\mathbf{q}_2 + x_o\mathbf{q}_3\,,$$

где $\mathbf{X}_{dqo}$ – чисто мнимый кватернион с вещественными коэффициентами

$$x_d = x_\alpha\cos\Theta + x_\beta\sin\Theta\,,\ x_q = x_\alpha\sin\Theta - x_\beta\cos\Theta\,,\ x_o = x_o\,.$$

Как видно из (11), преобразование R.H. Park в кватернионном базисе использует только два параметра в отличие от соответствующей квадратной матрицы $\mathbf{L}_{dqo}$ размерностью 3×3 в (9). При этом в силу ортогональности переходов (8) и (9) гиперкомплексные числа $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}$ и $\mathbf{\Lambda}_{dqo}$ имеют единичный модуль, вследствие чего формулы (4)–(7) принимают простой вид за счет исключения скалярных величин $|\mathbf{\Lambda}_{123}|$, $||\mathbf{\Lambda}_{123}||$, а мгновенная мощность трехфазной нагрузки или электромагнитный момент электрической машины переменного тока в осях $\alpha,\beta,o$ и $d,q,o$ будут совпадать с аналогичными физическими переменными исходного базиса $a,b,c$, причем в их составе также можно дополнительно выделить вещественные и мнимые составляющие [7, 12, 14, 11].

В заключение также необходимо отметить, что в реальных трехфазных системах переменного тока, как правило, используется отличное от (8) представление квадратной матрицы $\mathbf{L}_{\alpha\beta o}$ с $\det\mathbf{L}_{\alpha\beta o} \neq 1$, которое характеризуется наличием дополнительного коэффициента $k$, принимающего значения $\sqrt{\frac{2}{3}}$ или $\sqrt{\frac{3}{2}}$ [2]:

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta o} = k\mathbf{L}_{\alpha\beta o}\,,$$

что приводит к необходимости учета в расчетных соотношениях (4)–(7) и (10) модуля (нормы) кватерниона $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}$, который связан с определителем $\mathbf{P}_{\alpha\beta o}$ на основании равенства $\left|\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta o}\right| = \left(\det\mathbf{P}_{\alpha\beta o}\right)^{-\frac{1}{6}} = \sqrt{k}$ .

**Выводы.** Представленные в статье аналитические выражения для построения координатных переходов из исходного базиса трехфазных переменных $a,b,c$ к стационарной $\alpha,\beta,o$ или вращающейся $d,q,o$ системам отсчета в четырехмерном гиперкомплексном пространстве H, состоящем из одной вещественной и трех мнимых единиц, позволяют в рамках единого математического аппарата алгебры кватернионов синтезировать высококачественные алгоритмы управления активной фильтрацией и электропитанием нагрузок произвольного вида особо ответственных объектов, например, в аэрокосмической отрасли, реализуемых на базе программно-аппаратных средств с пониженными требованиями по производительности и быстродействию, что объясняется использованием только 4 кинематических параметров вместо 9 направляющих косинусов соответствующей квадратной матрицы.

Литература

1. *Нос О.В.* Анализ различных форм представления кинематических параметров в задачах линейного преобразования трехфазных переменных // Известия вузов. Электромеханика. 2012. № 5. С. 22–28.

2. *Нос О.В.* Математические модели преобразования энергии в асинхронном двигателе. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. 168 с.

3. *Нос О.В.* Методы анализа и синтеза трехфазных систем с активными силовыми фильтрами в гиперкомплексном пространстве: дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2015. 385 с.

4. *Нос О.В.* Применение алгебры кватернионов в математических моделях электрических машин переменного тока // Автоматизированные электромеханические системы: сб. науч. тр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. С. 16–32.

5. *Нос О.В.* Применение математического аппарата гиперкомплексных чисел при линейном преобразовании типа «вращение» // 10 International conference on actual problems of electronic instrument engineering proceedings. APEIE–2010 = Материалы 10 международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения». АПЭП-2010. Новосибирск, 2010. Т. 7. С. 46–50.

6. *Нос О.В., Коровин А.В., Кучак С.В.* Синтез алгоритма управления автономной системой энергоснабжения с использованием кватернионов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2022. Т. 333, № 1. С. 7–14.

7. *Нос О.В.* Система управления полупроводниковым устройством компенсации кватерниона мгновенной неэффективной мощности // 8-я Международная (19-я Всероссийская) конференция по автоматизированному электроприводу. АЭП-2014: в 2 т. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2014. Т. 1. С. 229–234.

8. *Contreras-Hernandez J.L., Almanza-Ojeda D.L., Ledesma-Orozco S., Garcia-Perez A., Romero-Troncoso R.J., Ibarra-Manzano M.A.* Quaternion signal analysis algorithm for induction motor fault detection. *IEEE Trans. Ind. Electron*., 2019, vol. 66, no. 11, pp. 8843–8850.

9. *Duesterhoeft W.C., Schulz M.W., Clarke E.* Determination of instantaneous currents and voltages by means of alpha, beta, and zero components. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1951, vol. 70, no. 2, pp. 1248–1255.

10. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method. Hodges and Smith, Dublin, 1853, 736 p.

11. *Nos O.V.* Control strategy of shunt active power filter based on an algebraic approach. In: 16th Int. Conf. of Young Specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM): [proc.], Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. IEEE, 2015, pp. 459–463.

12. *Nos O.V., Brovanov S.V., Dybko M.A.* Development of active filtering algorithms for higher harmonics in electrical power circuits. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 557–562.

13. *Nos O.V.* Linear transformations in mathematical models of an induction motor by quaternions. In: The 13th Int. Conf. and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM–2012: Proceedings. Erlagol, Altai, 2012, pp. 295–298.

14. *Nos O.V.* The quaternion model of doubly-fed induction motor. In: 11th Int. Forum on strategic technology (IFOST 2016): Proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. Novosibirsk, 2016, part 2, pp. 32–36.

15. *Park R.H.* Two-reaction theory of synchronous machines. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1929, vol. 48, no. 3, pp. 716–727.

**КОРОВИН АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ – соискатель ученой степени кандидата технических наук, кафедра проектирования технологических машин, Новосибирский государственный технический университет, Россия, Новосибирск (a_v_k87@bk.ru).**

**АЛЕКСАНДРОВ ИВАН ВИКТОРОВИЧ – аспирант кафедры проектирования технологических машин, Новосибирский государственный технический университет, Россия, Новосибирск (alexandrov.i2018@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3976-349X).**

**Aleksandr V. KOROVIN, Ivan V. ALEKSANDROV**

**COORDINATE TRANSFORMATIONS OF THREE-PHASE VARIABLES USING QUATERNIONS**

***Key words:*** *three-phase AC systems, E. Clarke and R.H. Park coordinate transformations, hypercomplex space, current and voltage quaternions, state-space coordinates.*

*Among the variety of modern approaches to the mathematical description of the power quality indicators during the processes of transmission, distribution, conversion and calculation of the ac electric power, the representation of three-phase models in the form of a purely imaginary quaternion located in a separate subspace of the four-dimensional hypercomplex space allows, in relation to the generally accepted method of analyzing linear circuits, for example, symmetrical components with the selection of a direct, reverse and zero phase sequence for the fundamental harmonic, to take into a more complete account the features of energy consumption, especially in the presence of distortion in the modified forms of harmonic signals. In addition, the division of the quaternion into scalar (real) and partial (imaginary) makes it possible to significantly simplify the subsequent analytical processing of synthesis of a power converters control signals for active filtering and power supply of autonomous loads of an arbitrary type, including a single-phase configuration, by extracting from its composition individual components responsible for both the amplitude-phase asymmetry and the nonlinearity of the characteristics.*

*The main algorithmic principles of organizing control structures as part of three-phase systems of various functional purposes, as a rule, are based on the conversion of reference signals and current values of measured currents and voltages into state coordinates obtained by rotating the three-dimensional space plane by a given angle. At the same time, the calculated ratios for the numerical determination of the initial variables transformed by rotation in the quaternion basis are a function of only four kinematic parameters, which, other things being equal, leads to a simplification of the control law in relation to the traditional vector-matrix approach using nine direction cosines with six connection equations. In this regard, this paper is devoted to the applied problems of implementing linear transformations by E. Clarke and R.H. Park in terms of four-dimensional hypercomplex numbers, in compliance with the additional requirement of the invariance of scalar quantities after the transition.*

## References

1. Nos O.V. *Analiz razlichnykh form predstavleniya kinematicheskikh parametrov v zadachakh lineinogo preobrazovaniya trekhfaznykh peremennykh* [Analysis of various forms of representation of kinematic parameters in problems of linear transformation of three-phase variables]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2012, no. 5, pp. 22–28.

2. Nos O.V. *Matematicheskie modeli preobrazovaniya energii v asinkhronnom dvigatele* [Mathematical models of energy conversion in an asynchronous motor]. Novosibirsk, 2008, 168 p.

3. Nos O.V. *Metody analiza i sinteza trekhfaznykh sistem s aktivnymi silovymi fil'trami v giperkompleksnom prostranstve: dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Methods of analysis and synthesis of three-phase systems with active power filters in a hypercomplex space. Doct. Diss]. Novosibirsk, 2015, 385 p.

4. Nos O.V. *Primenenie algebry kvaternionov v matematicheskikh modelyakh elektricheskikh mashin peremennogo toka* [Application of quaternion algebra in mathematical models of AC electrical machines]. In: Avtomatizirovannye elektromekhanicheskie sistemy: sb. nauch. tr. [Automated electromechanical systems. Proceedings]. Novosibirsk, 2011, pp. 16–32.

5. Nos O.V. *Primenenie matematicheskogo apparata giperkompleksnykh chisel pri lineinom preobrazovanii tipa "vrashchenie"* [Application of the mathematics of hypercomplex numbers in a linear transformation of the "rotation" type]. In: *Materialy 10 mezhdunarodnoi konferentsii "Aktual'nye problemy elektronnogo priborostroeniya", APEP-2010* [Proc. of 10th Int. Conf. on actual Problems of Electronic Instrument Engineering Proceedings APEIE–2010]. Novosibirsk, 2010, vol. 7, pp. 46–50.

6. Nos O.V. *Sintez algoritma upravleniya avtonomnoi sistemoi energosnabzheniya s ispol'zovaniem kvaternionov* [Synthesis of an algorithm for controlling an autonomous power supply system using quaternions]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov*, 2022, vol. 333, no. 1. pp. 7–14.

7. Nos O.V. *Sistema upravleniya poluprovodnikovym ustroistvom kompen-satsii kvaterniona mgnovennoi neeffektivnoi moshchnosti* [Control system for a semiconductor device for compensating the quaternion of instantaneous inefficient power]. In: *8 mezhdunarodnaya (19 Vserossiiskaya) konferentsiya po avtomatizirovannomu elektroprivodu. AEP-2014* [Proc. of 8th Int. (19th Russ.) Conf. on Automated Electric Drive]. Saransk, Mordovia State University Publ, 2014, vol. 1, pp. 229–234.

8. Contreras-Hernandez J.L., Almanza-Ojeda D.L., Ledesma-Orozco S., Garcia-Perez A., Romero-Troncoso R.J., Ibarra-Manzano M.A. Quaternion signal analysis algorithm for induction motor fault detection. *IEEE Trans. Ind. Electron*., vol. 66, no. 11, pp. 8843–8850, Nov. 2019.

9. Duesterhoeft W.C., Schulz M.W., Clarke E. Determination of instantaneous currents and voltages by means of alpha, beta, and zero components. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1951, vol. 70, no. 2, pp. 1248–1255.

10. Hamilton W.R. Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method. Hodges and Smith, Dublin, 1853, 736 p.

11. Nos O.V. Control strategy of shunt active power filter based on an algebraic approach. In: 16th Int. Conf. of Young Specialists on micro/nanotechnologies and electron devices (EDM): [proc.], Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. IEEE, 2015, pp. 459–463.

12. Nos O.V., Brovanov S.V., Dybko M.A. Development of active filtering algorithms for higher harmonics in electrical power circuits. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 557–562.

13. Nos O.V. Linear transformations in mathematical models of an induction motor by quaternions. In: The 13th Int. Conf. and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM–2012: Proceedings. Erlagol, Altai, 2012, pp. 295–298.

14. Nos O.V. The quaternion model of doubly-fed induction motor. In: 11th Int. Forum on strategic technology (IFOST 2016): Proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. Novosibirsk, 2016, part 2, pp. 32–36.

15. Park R.H. Two-reaction theory of synchronous machines. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1929, vol. 48, no. 3, pp. 716–727.

**ALEKSANDR V. KOROVIN – Academic Degree Candidate, Technological Machinery Design Department, Novosibirsk State Technical University, Russia, Novosibirsk (a_v_k87@bk.ru).**

**IVAN V. ALEKSANDROV – Post-Graduate Student, Department of Technological Machinery Design, Novosibirsk State Technical University, Russia, Novosibirsk (alexandrov.i2018@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3976-349X).**

**Формат цитирования:** *Коровин А.В., Александров И.В.* Координатные преобразования трехфазных переменных с использованием кватернионов // Вестник Чувашского университета. – 2022. – № 1. – С. 65–72. DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-65-72.