

DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-156-170

УДК 621.331

ББК 31.28

А.С. СЕРЕБРЯКОВ, В.Л. ОСОКИН, Д.Е. ДУЛЕПОВ

## АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В АКТИВНО-ЕМКОСТНОЙ ЦЕПИ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ВКЛЮЧЕНИИ КОНДЕНСАТОРОВ

**Ключевые слова:** установка компенсации реактивной мощности, численный метод решения дифференциальных уравнений, классический метод расчета переходных процессов, метод Рунге—Кутты.

Активно-емкостные и индуктивно-емкостные цепи с последовательным включением конденсаторов широко используют в электроэнергетике для компенсации реактивной мощности. В системах тягового электроснабжения железных дорог, электрифицированных на переменном токе, установки компенсации выполняют две задачи: при большой нагрузке они поддерживают заданную пропускную способность железной дороги, а при малой нагрузке снижают потери мощности в тяговой сети. Поэтому установка компенсации в тяговой сети должна быть, по крайней мере, двухступенчатой, т.е. иметь два значения реактивной мощности и, соответственно, два значения емкости. Значение реактивной мощности в таких установках регулируется ступенчато за счет переключения отдельных секций конденсаторов, которые включаются последовательно. При переключениях последовательно включенных конденсаторов могут возникать неизвестные ранее специфические переходные процессы, вызывающие значительные перенапряжения на конденсаторах.

Показано, что в некоторых случаях расчет переходных процессов в активно-емкостных цепях с последовательно включенными конденсаторами по известному классическому методу дает результаты, отличные от действительных значений. Цель статьи – дать неизвестное ранее теоретическое обоснование для расчета переходных процессов в электрических цепях, содержащих последовательно включенные конденсаторы на примере активно-емкостных цепей постоянного тока.

Проведенные исследования имеют практическое значение, так как в современных электроустановках в качестве коммутационной аппаратуры используются тиристорные ключи, при которых расщепление одного конденсатора в компенсирующей установке происходит при максимальном напряжении на работающем конденсаторе. В этом случае возможны перенапряжения, превышающие предполагаемые значения, в пределе до двойного амплитудного значения питающего напряжения. Дано теоретическое обоснование этого явления на примере анализа переходного процесса в активно-емкостной цепи с двумя последовательно включенными конденсаторами.

**Введение. Постановка задачи исследования.** Активно-емкостные цепи с последовательным включением конденсаторов широко используют в электроэнергетике в установках компенсации реактивной мощности. В частности, они применяются в установках компенсации реактивной мощности в системах тягового электроснабжения железных дорог, электрифицированных на переменном токе [2–4, 6, 11–13, 18, 20–23]. Установки компенсации в этом случае выполняют две главные задачи в тяговом электроснабжении: они поддерживают заданную пропускную способность железной дороги и снижают потери мощности в тяговой сети.

Когда проходят тяжеловесные поезда и нагрузка в тяговой сети максимальная, для повышения напряжения в тяговой сети емкость и мощность

установки компенсации реактивной мощности также должны быть максимальными. Когда нагрузка в тяговой сети становится минимальной, реактивная мощность и емкость должны быть минимальными. Поэтому установка компенсации должна иметь, по крайней мере, два значения реактивной мощности и, соответственно, два значения емкости. Значение реактивной мощности в таких установках регулируется ступенчато за счет переключения отдельных секций конденсаторов, которые могут включаться параллельно или последовательно. В ряде случаев последовательное включение конденсаторов оказывается более предпочтительным [4]. В режиме максимальной мощности включается только одна основная батарея конденсаторов, а вторая (дополнительная) батарея конденсаторов зашунтирована. В режиме минимальной мощности в установке компенсации последовательно включены обе батареи конденсаторов.

При переключениях последовательно включенных конденсаторов могут возникать специфические переходные процессы, вызывающие значительные перенапряжения на конденсаторах [17, 19]. Поэтому при проектировании переключаемых установок компенсации реактивной мощности необходимо рассчитывать не только установившиеся, но и переходные процессы в них.

Цель предлагаемой статьи – рассмотреть неизвестное ранее теоретическое обоснования для расчета переходных процессов в электрических цепях, содержащих последовательно включенные конденсаторы.

Чаще всего для расчета переходных процессов в электрических цепях используют классический метод, который подробно рассмотрен во многих учебниках по теоретическим основам электротехники [1, 5, 7–12, 16]. Однако специфика переходных процессов в электрических цепях с последовательно соединенными конденсаторами в этих учебниках не рассматривается. В некоторых случаях расчет по известному классическому методу дает результаты, отличные от действительных значений. Это обстоятельство и побудило авторов рассмотреть переходные процессы в активно-емкостных цепях с последовательным соединением конденсаторов и дать теоретическое обоснование новым неизвестным ранее соотношениям в этих электрических цепях.

**Материалы и методы.** Электрические цепи с последовательно соединенными конденсаторами применяют в качестве устройств компенсации реактивной мощности в системах электроснабжения с переменной нагрузкой. При этом с помощью коммутационной аппаратуры включают либо один, либо два последовательно соединенных конденсатора. Как показали исследования, основные закономерности в таких электрических цепях специфические и не зависят от вида действующего напряжения, поэтому рассмотрим указанные закономерности на примере электрической цепи постоянного тока.

Для понятия существа вопроса и обоснования метода расчета цепи RC при включении ее на синусоидальное напряжение и при коммутации конденсаторов рассмотрим переходный процесс в простейшей линейной цепи RC при включении ее на постоянное напряжение (рис. 1, а).

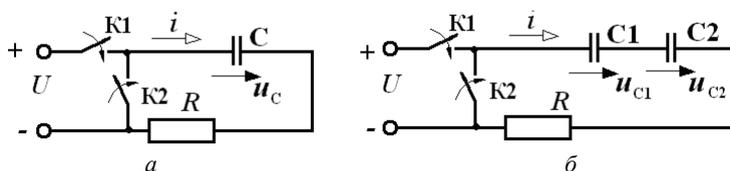


Рис. 1. Принципиальная схема линейной RC цепи с одним конденсатором (а) и двумя последовательно включенными конденсаторами (б)

Дифференциальное уравнение цепи RC с последовательно соединенными элементами  $R$  и  $C$  при подключении ее к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 1, а) после замыкания ключа  $K1$  записывается на основании второго закона Кирхгофа [10]

$$Ri + u_c = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_c(0) = U. \quad (1)$$

Известно, что общее решение  $i(t)$  уравнения (1), как всякого линейного дифференциального уравнения, складывается из частного решения – установившейся составляющей  $i_y$ , определяемой видом правой части уравнения (1), и общего решения уравнения (1) без правой части – свободной составляющей  $i_{св}$  [10]. В данном случае составляющие тока будут определяться следующими выражениями:  $i_y = 0$ , так как постоянный ток через конденсатор не протекает, и  $i_{св} = A \cdot e^{pt}$ . Следовательно:

$$i = i_y + i_{св} = A \cdot e^{pt}, \quad (2)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;  $p = -\frac{1}{RC}$  – корень характеристического уравнения  $R + \frac{1}{pC} = 0$ , составленного для дифференциального уравнения (1).

Постоянная интегрирования  $A$  определяется из начальных условий (НУ):  $t = 0$ ;  $u_c = u_c(0)$ . После подстановки НУ в (2) с учетом (1) получим

$$i(0) = A \cdot e^0 = A = \frac{U - u_c(0)}{R}. \quad (3)$$

Следовательно, полное решение для тока в цепи после включения ключа  $K1$  будет иметь вид

$$i = \frac{U - u_c(0)}{R} e^{pt} = \frac{U - u_c(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4)$$

Напряжение на конденсаторе  $C$  в установившемся режиме

$$\begin{aligned} u_{c,y} &= \frac{1}{C} \int_0^\infty idt + u_c(0) = \frac{1}{C} \int_0^\infty \frac{U - u_c(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt + u_c(0) = \\ &= \frac{U - u_c(0)}{RC} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{RC}} dt + u_c(0) = \frac{U - u_c(0)}{RC} (-RC) [e^{-\infty} - e^0] + u_c(0) = \\ &= U - u_c(0) + u_c(0) = U. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, как следует из формулы (5), при включении цепи  $RC$  на постоянное напряжение установившееся значение напряжения на конденсаторе не зависит от начальных условий, т.е. от начального напряжения на нем. Установившееся значение тока в цепи равно нулю.

В течение переходного процесса конденсатор  $C$  получает заряд

$$\Delta q = \int_0^{\infty} i dt = \frac{U - u_c(0)}{R} (RC) = [U - u_c(0)]C. \quad (6)$$

и, соответственно, напряжение на конденсаторе возрастает на величину  $\Delta u$

$$\Delta u = \frac{\Delta q}{C} = \frac{[U - u_c(0)]C}{C} = U - u_c(0). \quad (7)$$

Иная картина получается при включении цепи  $RC$  на постоянное напряжение при последовательном соединении двух конденсаторов (рис. 1, б). Пусть конденсаторы  $C1$  и  $C2$  соединены последовательно и имеют до коммутации начальные заряды  $q1(0)$  и  $q2(0)$ , т.е. конденсаторы заряжены до напряжения  $u_{c1}(0) = \frac{q1(0)}{C1}$  и  $u_{c2}(0) = \frac{q2(0)}{C2}$ . Тогда уравнение, составленное для цепи на рис. 1, б, после замыкания ключа  $K1$  на основании второго закона Кирхгофа следующее:

$$\begin{aligned} Ri + u_{c1} + u_{c2} &= Ri + \frac{1}{C1} \int_0^t i dt + u_{c1}(0) + \frac{1}{C2} \int_0^t i dt + u_{c2}(0) = \\ &= Ri + \left( \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} \right) \int_0^t i dt + u_{c1}(0) + u_{c2}(0) = \\ &= Ri + \left( \frac{C1 + C2}{C1 \cdot C2} \right) \int_0^t i dt + u_{c1}(0) + u_{c2}(0) = \\ &= Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_{c1}(0) + u_{c2}(0) = U, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C = \frac{C1 \cdot C2}{C1 + C2}$  – емкость эквивалентного конденсатора при последовательном включении двух конденсаторов  $C1$  и  $C2$ .

Если обозначить

$$u_{c1}(0) + u_{c2}(0) = u_c(0),$$

то уравнение (8) превращается в уравнение (1), т.е. два последовательно включенных конденсатора  $C1$  и  $C2$  заменяются одним эквивалентным конденсатором  $C$ . Напряжение на эквивалентном конденсаторе равно алгебраической сумме напряжений на каждом из конденсаторов. Как и ранее, определим ток  $i$  переходного процесса по формуле (2).

Постоянную интегрирования определим из начальных условий (НУ):

$$t = 0; u_{c1} = u_{c1}(0); u_{c2} = u_{c2}(0); i(0) = A = \frac{U - u_{c1}(0) - u_{c2}(0)}{R}.$$

Следовательно,

$$i = Ae^{pt} = \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{R} e^{pt} = \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U - u_C(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (9)$$

где  $u_C(0) = u_{C1}(0) + u_{C2}(0)$ .

Выражение (9) для тока  $i$  совпадает с выражением (4). Следовательно, установившееся значение напряжения на эквивалентном конденсаторе  $C$  не будет зависеть от НУ, т.е. от начальных напряжений на конденсаторах  $C1$  и  $C2$ . Однако в действительности напряжения на отдельных конденсаторах  $C1$  и  $C2$  будут зависеть от НУ.

Напряжение на конденсаторе  $C1$  в установившемся режиме

$$\begin{aligned} u_{C1,y} &= \frac{1}{C1} \int_0^{\infty} i dt + u_{C1}(0) = \\ &= \frac{1}{C1} \int_0^{\infty} \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt + u_{C1}(0) = \\ &= \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{RC1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt + u_{C1}(0) = \\ &= \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{RC1} (-RC) [e^{-\infty} - e^0] + u_{C1}(0) = \\ &= \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{C1} \cdot \frac{C1 \cdot C2}{C1 + C2} + u_{C1}(0) = \\ &= (U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)) \cdot \frac{C2}{C1 + C2} + u_{C1}(0) = \Delta u_{C1} + u_{C1}(0), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta u_{C1}$  – значение, на которое возрастает после включения ключа  $K1$  напряжение на конденсаторе  $C1$ .

Преобразуем выражение (10)

$$\begin{aligned} u_{C1,y} &= \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{C1} \cdot \frac{C1 \cdot C2}{C1 + C2} + u_{C1}(0) = \\ &= U \frac{C2}{C1 + C2} + \frac{(-u_{C1}(0) - u_{C2}(0))C2}{C1 + C2} + u_{C1}(0) = \\ &= U \frac{C2}{C1 + C2} + \frac{(-u_{C1}(0) - u_{C2}(0))C2 + u_{C1}(0)(C1 + C2)}{C1 + C2} = \\ &= U \frac{C2}{C1 + C2} + \frac{u_{C1}(0)C1 - u_{C2}(0)C2}{C1 + C2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично получим выражения для напряжения на конденсаторе  $C2$

$$u_{C2,y} = (U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)) \cdot \frac{C1}{C1 + C2} + u_{C2}(0) = \Delta u_{C2} + u_{C2}(0), \quad (12)$$

или

$$u_{C2.Y} = U \frac{C1}{C1 + C2} + \frac{u_{C2}(0)C2 - u_{C1}(0)C1}{C1 + C2}, \quad (13)$$

где  $\Delta u_{C2}$  – значение, на которое возрастает после включения ключа К1 напряжение на конденсаторе С2.

Как видно из (11) и (13), установившиеся напряжения на конденсаторах С1 и С2 будут иметь не одну составляющую, а две составляющих.

Если емкости конденсаторов равны ( $C1 = C2$ ), то установившиеся значения напряжений на конденсаторах будут определяться по формулам

$$u_{C1.Y} = \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2} + u_{C1}(0) = \frac{U}{2} + \frac{u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2}, \quad (14)$$

$$u_{C2.Y} = \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2} + u_{C2}(0) = \frac{U}{2} + \frac{u_{C2}(0) - u_{C1}(0)}{2}. \quad (15)$$

Из (12), (13) и (14), (15) следует, что  $u_{C1.Y} + u_{C2.Y} = U$ .

Окончательно получим выражения для напряжений на конденсаторах при  $C1 = C2$ :

$$u_{C1} = u_{C1.Y} + u_{C1.CB} = \frac{U}{2} + \frac{u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2} + \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad (16)$$

$$u_{C2} = u_{C2.Y} + u_{C2.CB} = \frac{U}{2} + \frac{u_{C2}(0) - u_{C1}(0)}{2} + \frac{U - u_{C1}(0) - u_{C2}(0)}{2} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (17)$$

Таким образом, установившиеся значения напряжений на каждом из последовательно выключенных конденсаторов при подключении к источнику постоянного напряжения имеют две составляющие и зависят от заданных условий, т.е. от начальных напряжений на конденсаторах. Расчет установившихся значений напряжений на конденсаторах при  $C1 = C2$  следует производить по формулам (14) и (15). Аналогично нетрудно получить выражения и для случая, когда  $C1 \neq C2$ .

**Результаты и обсуждение исследований.** На рис. 2 показаны зависимости напряжений и токов от времени при подключении двух последовательно включенных конденсаторов С1 и С2 (рис. 1, б) к источнику постоянного напряжения, полученные с помощью приведенных выше формул.

Рассмотрим процесс включения двух последовательно включенных конденсаторов на постоянное напряжение для примера на рис. 2, б с энергетической точки зрения. Конденсатор С1 до коммутации имел заряд  $Q_{C1}(0) = C1 \cdot u_{C1}((0)) = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 1200 \cdot 10^{-6}$  Кл.

$U = 100$  В,  $R = 100$  Ом:

а)  $C1 = C2 = 30$  мкФ,  $u_{C1}(0) = 40$  В,  $u_{C2}(0) = 0$  В;

б)  $C1 = 30$  мкФ,  $C2 = 15$  мкФ,  $u_{C1}(0) = 40$  В,  $u_{C2}(0) = 0$  В.

Конденсатор С2 до коммутации был не заряжен, т.е. имел нулевой заряд  $Q_{C2}(0) = C2 \cdot u_{C2}((0)) = 0$  Кл.

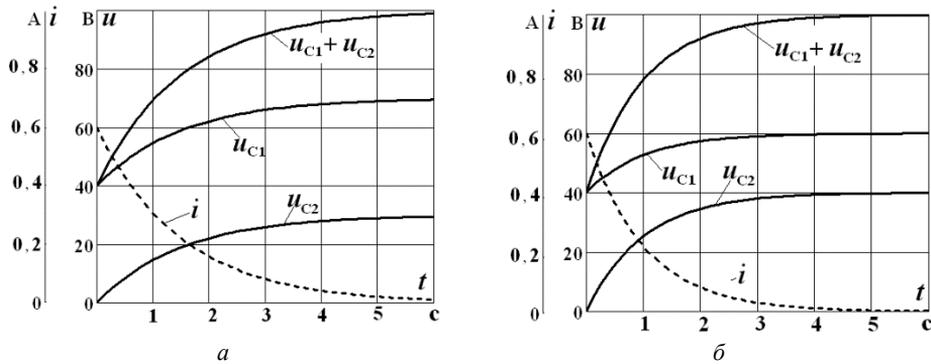


Рис. 2. Зависимости напряжений и токов от времени при подключении двух последовательно включенных конденсаторов (рис. 1, б) к источнику постоянного напряжения

Напряжение на конденсаторе  $C_1$  увеличится после коммутации на

$$\Delta u_{C_1} = [U - u_{C_1}(0) - u_{C_2}(0)] \frac{C_2}{C_1 + C_2} = [100 - 40 - 0] \frac{15}{30 + 15} = 20 \text{ В}$$

и станет равным  $u_{C_1} = u_{C_1}(0) + \Delta u_{C_1} = 40 + 20 = 60 \text{ В}$ .

Напряжение на конденсаторе  $C_2$  увеличится после коммутации на

$$\Delta u_{C_2} = [U - u_{C_1}(0) - u_{C_2}(0)] \frac{C_1}{C_1 + C_2} = [100 - 40 - 0] \frac{30}{30 + 15} = 40 \text{ В}$$

и станет равным  $u_{C_2} = u_{C_2}(0) + \Delta u_{C_2} = 0 + 40 = 40 \text{ В}$ .

Конденсатор  $C_1$  после коммутации получил дополнительный заряд

$$\Delta Q_{C_1} = C_1 \cdot \Delta u_{C_1} = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

и заряд на нем после коммутации стал равен

$$Q_{C_1} = Q_{C_1}(0) + \Delta Q_{C_1} = (1200 + 600) \cdot 10^{-6} = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Конденсатор  $C_2$  после коммутации получил дополнительный заряд

$$\Delta Q_{C_2} = C_2 \cdot \Delta u_{C_2} = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

и заряд на нем после коммутации стал равен

$$Q_{C_2} = Q_{C_2}(0) + \Delta Q_{C_2} = (0 + 600) \cdot 10^{-6} = 600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Заряд, полученный от источника питания цепью с двумя последовательно включенными конденсаторами:

$$\begin{aligned} Q_{C_{12}} &= \int_0^{\infty} i \cdot dt = \int_0^{\infty} \frac{U - u_{C_1}(0) - u_{C_2}(0)}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{100 - 40 - 0}{100} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} dt = \int_0^{\infty} 0,6 \cdot e^{-\frac{t}{10^{-3}}} dt = \\ &= 0,6 \cdot (-10^{-3}) \left( e^{\frac{-\infty}{10^{-3}}} - e^{\frac{-0}{10^{-3}}} \right) = 0,6 \cdot (-10^{-3})(0 - 1) = 600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.} \end{aligned}$$

Таким образом, для увеличения заряда на каждом из конденсаторов на  $600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$  от источника питания был получен заряд  $600 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ . Поскольку

конденсаторы включены последовательно, то полученные ими заряды оказываются равны. Однако приращения напряжений  $\Delta u_{C1} = 20$  В и  $\Delta u_{C2} = 40$  В на конденсаторах за счет разных емкостей  $C1$  и  $C2$  оказались неравными.

Итак, поскольку в начале переходного процесса заряды на конденсаторах  $C1$  и  $C2$  не были равны, то и по окончании переходного процесса заряды на них по-прежнему останутся неравными. Разность зарядов на конденсаторах в течение всего переходного процесса будет постоянной

$$\begin{aligned} Q_{C1}(0) - Q_{C2}(0) &= (1200 - 0) \cdot 10^{-6} = Q_{C1} - Q_{C2} = \\ &= (1800 - 600) \cdot 10^{-6} = 1200 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.} \end{aligned}$$

Как следует из рис. 2 и проведенного анализа, в цепях постоянного тока установившиеся значения напряжений на последовательно включенных конденсаторах зависят от начальных условий. Дальнейший анализ показал, что это правило справедливо и для цепей синусоидального тока.

Заметим, что если заряды на последовательно включенных конденсаторах неравны, то после отключения цепи от источника питания (ключ  $K1$  разомкнут) и замыкания выводов цепи накоротко (ключ  $K2$  замкнут), конденсаторы не смогут полностью разрядиться. На обоих конденсаторах при замкнутых выводах остаются заряды и, соответственно, напряжения. Напряжения на конденсаторах будут равны по значению и противоположны по знаку. Заряды же будут разные, они будут пропорциональны емкости конденсатора – на конденсаторе с большей емкостью заряд будет больше, а на конденсаторе с меньшей емкостью – меньше. Напряжения на конденсаторах  $C1$  и  $C2$  после замыкания выводов накоротко (рис. 2, б) определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_{C1} &= \frac{u_{C1}(0) \cdot C1 - u_{C2}(0) \cdot C2}{C1 + C2} = \frac{(40 \cdot 30 - 0 \cdot 15) \cdot 10^{-6}}{(30 + 15) \cdot 10^{-6}} = \\ &= \frac{40 \cdot 30 - 0 \cdot 15}{(30 + 15)} = \frac{1200}{45} = 26,7 \text{ В.} \\ u_{C2} &= \frac{u_{C2}(0) \cdot C2 - u_{C1}(0) \cdot C1}{C1 + C2} = \frac{(0 \cdot 15 - 40 \cdot 30) \cdot 10^{-6}}{(30 + 15) \cdot 10^{-6}} = \\ &= \frac{0 \cdot 15 - 40 \cdot 30}{(30 + 15)} = \frac{-1200}{45} = -26,7 \text{ В.} \end{aligned}$$

Отметим, что напряжения на конденсаторах  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  после замыкания выводов накоротко не зависят от того, на какое питающее напряжение были подключены конденсаторы: 40, 100 или 200 В.

Как показали дальнейшие исследования, по этим же формулам определяются напряжения и в том случае, если цепь с двумя последовательно включенными конденсаторами была подключена до замыкания выводов (до замыкания ключа  $K2$ ) к источнику синусоидального тока.

Два последовательно включенных конденсатора  $C1$  и  $C2$  на схеме рис. 1, б можно представить как один эквивалентный конденсатор  $C$ , емкость которого

$$C = \frac{C1 \cdot C2}{C1 + C2} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 10 \text{ мкФ.}$$

В установившемся режиме напряжение

на этом эквивалентном конденсаторе  $U = 100$  В, а эквивалентный заряд  $Q = C \cdot U = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1000 \cdot 10^{-6}$  Кл.

Именно такой заряд проходит по проводнику, замыкающему накоротко выводы схемы на рис. 1, б, после отключения цепи от источника постоянного напряжения (ключ К1 выключен, а ключ К2 включен). Действительно, при разряде эквивалентного конденсатора С емкостью 10 мкФ, заряженного до напряжения 100 В, через резистор 100 Ом он отдает заряд

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\infty} I_M e^{-\frac{t}{RC}} dt = - \int_0^{\infty} \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = - \int_0^{\infty} \frac{100}{100} e^{-10^{-3}t} dt = \\ &= 10^{-3} [e^{-\infty} - e^0] = 10^{-3} [0 - 1] = -1000 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.} \end{aligned}$$

После разряда эквивалентного конденсатора его заряд и напряжение на нем становятся равными нулю. В действительности же на конденсаторах С1 и С2 остаются заряды и напряжения противоположных знаков, обусловленные начальными условиями, т.е. напряжениями на конденсаторах до подключения схемы к источнику питания. В этом заключается принципиальное различие между двумя последовательно соединенными реальными конденсаторами и одним эквивалентным конденсатором.

Заряд  $Q = 1000 \cdot 10^{-6}$  Кл для двух последовательно включенных конденсаторов можно также определить следующим образом. После размыкания ключа К1 и замыкания ключа К2 конденсаторы С1 и С2 оказываются соединенными параллельно и встречно. При таком соединении напряжения на конденсаторах должны быть равными, а заряды обратно пропорциональны емкостям конденсаторов С1 и С2. Очевидно, что конденсатор С1 должен отдать  $600 \cdot 10^{-6}$  Кл, чтобы нейтрализовать заряд на конденсаторе С2, т.е. сделать заряд на конденсаторе С2 равным нулю. При этом на конденсаторе С1 остается заряд  $1800 \cdot 10^{-6} - 600 \cdot 10^{-6} = 1200 \cdot 10^{-6}$  Кл. Далее конденсатор С1 должен еще отдать заряд конденсатору С2, для того чтобы напряжения на конденсаторах С1 и С2 стали равными. Этот заряд равен

$$\frac{1200 \cdot 10^{-6}}{C1 + C2} C2 = \frac{1200 \cdot 10^{-6}}{30 + 15} \cdot 15 = \frac{1200 \cdot 10^{-6}}{2 + 1} = 400 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Таким образом, суммарный заряд, отданный конденсатором С1 конденсатору С2 через ключ К2, составляет  $1000 \cdot 10^{-6}$  Кл.

Для проверки указанных положений приведем решение дифференциальных уравнений, описывающих процессы при подключении цепи RC с двумя последовательно включенными конденсаторами (рис. 1, б) к источнику постоянного напряжения  $U$ . Дифференциальные уравнения, описывающие процесс подключения указанной цепи к источнику постоянного напряжения:

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= \frac{1}{C1} \int_0^t i \cdot dt + u_{C1}(0); \\ u_{C2}(t) &= \frac{1}{C2} \int_0^t i \cdot dt + u_{C2}(0); \\ i(t) &= \frac{U - u_{C1}(t) - u_{C2}(t)}{R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим выражение для тока в первые два уравнения и запишем уравнения (18) в форме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{du_{C1}(t)}{dt} &= \frac{1}{C1} \cdot \frac{U - u_{C1}(t) - u_{C2}(t)}{R}; \\ \frac{du_{C2}(t)}{dt} &= \frac{1}{C2} \cdot \frac{U - u_{C1}(t) - u_{C2}(t)}{R}. \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 3 приведена программа решения системы двух дифференциальных уравнений ((19) в интегрированном пакете Mathcad численным методом Рунге–Кутта четвертого порядка [15]. Для решения используется стандартная функция *rkfixed* интегрирования дифференциальных уравнений в форме Коши с фиксированным шагом. Здесь введены следующие компьютерные переменные:  $x_0 = u_{C1}$  и  $x_1 = u_{C2}$ .

```

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА
ПРИ ЗАРЯДЕ И РАЗРЯДЕ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО
ВКЛЮЧЕННЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

U(t) := if(t < 0.008, 100, 0)      R := 100
C1 := 30 · 10-6      C2 := 15 · 10-6

x := ( 40
      0 )      D(t, x) := ( 1/C1 · (U(t) - x0 - x1)
                          1/C2 · (U(t) - x0 - x1) )

Z := rkfixed(x, 0, 2, 200000, D)      n := 0..20000
tn := Zn,0      uc1n := Zn,1      uc2n := Zn,2

Un := if(tn < 0.008, 100, 0)      in := (Un - uc1n - uc2n) / R

(C1 · x0 - C2 · x1) / (C1 + C2) = 26.667      (C2 · x1 - C1 · x0) / (C1 + C2) = -26.667
    
```

Рис. 3. Программа расчета переходного процесса при заряде и разряде двух последовательно включенных конденсаторов в интегрированном пакете Mathcad

В скобках функции *rkfixed* перечисляются через запятую: вектор начальных условий  $x$  для искомых переменных ( $x_0(0) = u_{C1}(0) = 40$  В и  $x_1(0) = u_{C2}(0) = 0$  В), начальная 0 и конечная 2 точки интервала интегрирования, выраженные в секундах, число точек 200 000, не считая нулевой точки, и вектор  $D$  первых производных искомых функций [15].

Для вектора  $D$  первых производных искомых функций в скобках сначала указывается переменная, по которой берется производная (в данном случае это время  $t$ ), и через запятую указывается вектор функций, от которых берутся производные (это  $x$ ).

При использовании функции *rkfixed* решение системы дифференциальных уравнений получается в виде матрицы, обозначенной в нашем случае  $Z$ . Матрица  $Z$  имеет три столбца. Первый столбец содержит точки, в которых ищется решение системы дифференциальных уравнений (время  $t$ ). Второй и третий столбцы содержат значения найденных решений: напряжений  $u_{C1}(x_0)$  и  $u_{C2}(x_1)$  в заданных точках  $t$ .

На рис. 4 и 5 приведены результаты расчета переходных процессов при подключении электрической цепи на рис. 1, б с двумя последовательно включенными конденсаторами к источнику постоянно тока и отключении цепи с разрядом конденсаторов при разных начальных условиях. Замкнутое состояние ключей  $K1$  и  $K2$  на рис. 4 и 5 показано темными полосами.

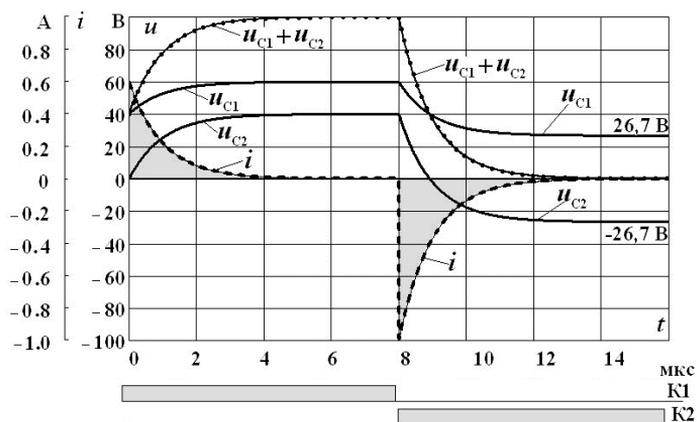


Рис. 4. Переходные процессы при заряде и разряде последовательно включенных конденсаторов:  $u_{C1}(0) = 40$  В;  $u_{C2}(0) = 0$  В

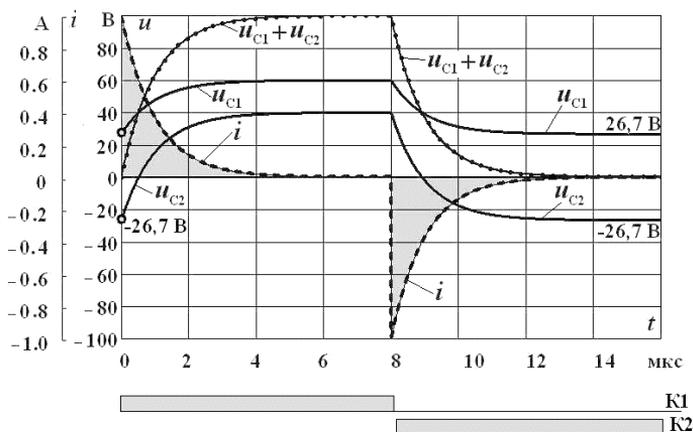


Рис. 5. Переходные процессы при заряде и разряде последовательно включенных конденсаторов:  $u_{C1}(0) = 26,7$  В;  $u_{C2}(0) = -26,7$  В

Включение и выключение ключей K1 и K2 в программе задается с помощью функции *if* с условием: если время  $t < 0,0008$  с ( $< 8$  мкс), то включен ключ K1 и питающее напряжение равно 100 В; если же это условие не соблюдается ( $t \geq 0,008$  с), то  $U = 0$ , т.е. ключ K1 разомкнут, а ключ K2 замкнут.

**Выводы.** При расчете переходных процессов в электрических цепях с последовательным включением конденсаторов следует с осторожностью пользоваться классическим методом при расчете переходных процессов. При ненулевых начальных условиях на конденсаторах появляются дополнительные установившиеся составляющие напряжения, которые определяются по формулам

$$u_{C1.у.доп} = \frac{u_{C1}(0)C1 - u_{C2}(0)C2}{C1 + C2},$$
$$u_{C2.у.доп} = \frac{u_{C2}(0)C2 - u_{C1}(0)C1}{C1 + C2}.$$

В установившемся режиме на конденсаторах при питании электрической цепи от источника постоянного или синусоидального тока может присутствовать постоянная составляющая.

По отношению к оставшейся части схемы два последовательно включенных конденсатора ведут себя как один эквивалентный конденсатор без постоянной составляющей. Поэтому нет и постоянной составляющей в токе. Постоянные составляющие на эквивалентном конденсаторе в сумме дают нуль. Но на каждом из конденсаторов они могут увеличивать напряжение. Эти перенапряжения при питании цепей синусоидальным напряжением необходимо предвидеть и по возможности избегать их [17, 19].

#### Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. 12-е изд., исправ. и доп. М.: Юрайт, 2014. 701 с.
2. Герман Л.А., Серебряков А.С., Максимова А.А. Фильтрокомпенсирующие установки в тяговых сетях переменного тока // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2016. Т. 75, № 1. С. 26.
3. Герман Л.А., Серебряков А.С., Осокин В.Л., Якунин Д.В. Переключаемая фильтрокомпенсирующая установка в тяговой сети переменного тока // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2020. Т. 79, № 2. С. 80–87. DOI: 10.21780/2223-9731-2020-79-2-80-87.
4. Герман Л.А., Серебряков А.С., Дулепов Д.Е. Фильтрокомпенсирующие установки в системах тягового электроснабжения железных дорог. Княгинино: Изд-во НГИЭУ 2017, 402 с.
5. Довгун В.П., Егоров Д.Э., Важенина И.Г., Синяговский А.Ф. Регулируемые фильтрокомпенсирующие устройства для систем тягового электроснабжения // Омский научный вестник. 2018. № 5(161). С. 45–50.
6. Доманский И.В. Режимы работы системы тягового электроснабжения переменного тока с устройствами компенсации реактивной мощности // Электротехника и электромеханика. 2015. № 3. С. 59–66.
7. Иванов И.И., Соловьев Г.И., Фролов В.Я. Электротехника и основы электроники. 9-е изд., стер. СПб.: Лань, 2017. 736 с.
8. Касаткин А.С., Немцов М.В. Курс электротехники. 8-е изд. М.: Высш. шк., 2005. 542 с.
9. Лазута И.В., Реброва И.А. Основы электротехники и электроники. [Электронный ресурс]. Омск: СибАДИ, 2018. URL: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd636.pdf> (дата обращения: 01.12.2021).

10. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 2 т. 3-е изд. перераб. и доп. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. Т. 1. 536 с.
11. Пат. 2704023 РФ. Трехступенчатая фильтрокомпенсирующая установка тяговой сети переменного тока / Серебряков А.С., Герман Л.А., Осокин В.Л., Дмитриева Н.Ю.; заявитель и патентообладатель НГИЭУ. № 2019108106; заявл. 21.03.2019; опубл. 23.10.2019, Бюл. № 30. 9 с.
12. Пат. 2475912 РФ. Устройство переключаемой однофазной поперечной емкостной компенсации в тяговой сети переменного тока / Серебряков А.С., Герман Л.А., Дулепов Д.Е., Семенов Д.А.; заявитель и патентообладатель НГИЭУ. № 2011108818; заявл. 09.03.2011; опубл. 10.02.2013, Бюл. № 5. 5 с.
13. Пат. 2739329 РФ. Переключаемая фильтрокомпенсирующая установка / Серебряков А.С., Герман Л.А., Осокин В.Л., Дулепов Д.Е., Саевич В.Л.; заявитель и патентообладатель НГИЭУ. № 2020126267; заявл. 06.08.2020; опубл. 22.12.2020, Бюл. № 36. 9 с.
14. Реброва И.А. Расчёт установившихся режимов в линейных электрических цепях. Омск: СибАДИ, 2013.
15. Серебряков А.С. Mathcad и решение задач электротехники. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ФГБУ ДПО «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2019. 568 с.
16. Серебряков А.С. Электротехника и электроника. лабораторный практикум на Electronics Workbench и Multisim. М.: Высш. шк., 2012. 335 с.
17. Серебряков А.С., Герман Л.А., Осокин В.Л. Исследование переходных процессов в переключаемой фильтрокомпенсирующей установке // Интеллектуальная электротехника. 2018. № 2. С. 84–92.
18. Серебряков А.С., Герман Л.А., Якунин Д.В., Маралова В.А., Максимова А.А. Двухступенчатая установка поперечной емкостной компенсации в тяговых сетях железных дорог // Электроника и электрооборудование транспорта. 2016. № 4. С. 27–31.
19. Серебряков А.С., Осокин В.Л., Дулепов Д.Е. Переходный процесс в установке компенсации реактивной мощности с последовательным включением конденсаторов при расшунтировании одного из них // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2021. № 4. С. 84–91.
20. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. Instantaneous power theory and applications to power conditioning. Hoboken, N.J., Wiley, 2007, 379 p.
21. Das J. Passive filters-potentialities and limitations. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 232–241.
22. Kim H., Blaabjerg F., Bak-Jensen D., Cho J. Instantaneous power compensation in three-phase systems by using p-q-r theory. In: The IEEE 32<sup>nd</sup> Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC 2001, Vancouver, Canada, June 17-21, 2001. Vancouver, 2001, vol. 2, pp. 478–485.
23. Tan P.-C., Loh P.C., Holmes D.G. A robust multilevel hybrid compensation system for 25-kV electrified railway applications. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2004, vol. 19, iss. 4, pp. 1043–1052. DOI: 10.1109/TPEL.2004.830038.

---

**СЕРЕБРЯКОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ** – доктор технических наук, профессор кафедры электрификация и автоматизация, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, Россия, Княгинино (a.sereb@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7455-2348>).

**ОСОКИН ВЛАДИМИР ЛЕОНИДОВИЧ** – кандидат технических наук, доцент кафедры электрификации и автоматизации, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, Россия, Княгинино (osokinvl@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8772-4252>).

**ДУЛЕПОВ ДМИТРИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ** – кандидат технических наук, заведующий кафедрой электрификации и автоматизации, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, Россия, Княгинино (dulepov.86@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1044-1865>).

---

Alexander S. SEREBRYAKOV, Vladimir L. OSOKIN, Dmitry E. DULEPOV

TRANSIENT ANALYSIS OF ACTIVE-CAPACITIVE  
CIRCUITS WHEN CAPACITORS ARE CONNECTED IN SERIES

**Key words:** reactive power compensation installation, numerical method for solving differential equations, classical method for calculating transient processes, Runge–Kutta method.

Active-capacitive and inductive-capacitive circuits with series connection of capacitors are widely used in the electric power industry to compensate for reactive power. In traction power supply systems for railways electrified with alternating current, compensation units perform two tasks: under heavy load, they maintain a given railway throughput, and under low load, they reduce power losses in the traction network. Therefore, the installation of compensation in the traction network must be at least two-stage, i.e. have two reactive power values and, accordingly, two capacitance values. The value of reactive power in such installations is regulated in steps by switching individual sections of capacitors, which are connected in series. When switching capacitors in series, previously unknown specific transients can occur. They cause significant overvoltages on the capacitors.

It is shown that in some cases the calculation of transient processes in active-capacitive circuits with capacitors connected in series using the well-known classical method gives results that differ from the actual values.

The purpose of the article is to provide a previously unknown theoretical basis for calculating transient processes in electrical circuits containing series-connected capacitors using the example of active-capacitive DC circuits.

The studies carried out are of practical importance, since in modern electrical installations, thyristor switches are used as switching equipment, in which the shunting of one capacitor in the compensating installation occurs at the maximum voltage on the operating capacitor. In this case, overvoltages exceeding the assumed values are possible, in the limit up to double the amplitude value of the supply voltage. A theoretical substantiation of this phenomenon is given by the example of the analysis of the transient process in an active-capacitive circuit with two consecutively connected capacitors.

#### References

1. Bessonov L.A. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Elektricheskie tsepi* [Theoretical foundations of electrical engineering. Electric circuits: a textbook for bachelors]. Moscow, Yurayt Publ., 2014, 701 p.
2. German L.A., Serebryakov A.S., Maksimova A.A. *Fil'trokompensiruyushchie ustanovki v tyagovykh setyakh peremennogo toka* [Filter-compensating installations in AC traction networks]. *Vestnik nauchno-issledovatel'skogo instituta zheleznodorozhnogo transporta*, 2016, no. 1, p. 26.
3. German L.A., Serebryakov A.S., Osokin V.L., Yakunin D.V. *Pereklyuchaemaya fil'trokompensiruyushchaya ustanovka v tyagovoi seti peremennogo toka* [Switchable filter-compensating installation in AC traction network]. *Vestnik nauchno-issledovatel'skogo instituta zheleznodorozhnogo transporta*, 2020, no. 2, pp. 80–87. DOI: 10.21780/2223-9731-2020-79-2-80-87.
4. German L.A., Serebryakov A.S., Dulepov D.E. *Fil'trokompensiruyushchie ustanovki v sistemakh tyagovogo elektrosnabzheniya zheleznykh dorog* [Filter-compensating installations in traction power supply systems of railways]. Knyaginino, 2017, 402 p.
5. Dovgun V.P., Egorov D.E., Vazhenina I.G., Sinyagovskii A.F. *Reguliruemye fil'trokompensiruyushchie ustroystva dlya sistem tyagovogo elektrosnabzheniya* [Adjustable filter-compensating devices for traction power supply systems]. *Omskii nauchnyi vestnik*, 2018, no. 5 (161), pp. 45–50.
6. Domanskii I.V. *Rezhimy raboty sistemy tyagovogo elektrosnabzheniya peremennogo toka s ustroystvami kompensatsii reaktivnoi moshchnosti* [Operating modes of the AC traction power supply system with reactive power compensation devices]. *Elektrotekhnika i elektromekhanika*, 2015, no. 3, pp. 59–66.
7. Ivanov I.I., Solov'ev G.I., Frolov V.Ya. *Elektrotekhnika i osnovy elektroniki. 9-e izd.* [Electrical engineering and fundamentals of electronic. 9<sup>th</sup> ed.]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2017, 736 p.
8. Kasatkin A.S., Nemtsov M.V. *Kurs elektrotekhniki. 8-e izd.* [Electrical engineering course. 8<sup>th</sup> ed.]. Moscow, Higher School Publ., 2005, 542 p.
9. Lazuta I.V., Rebrova I.A. *Osnovy elektrotekhniki i elektroniki* [Fundamentals of electrical engineering and electronics: a tutorial]. Omsk, SibADI Publ., 2018. Available as: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd636.pdf> (Accessed Date 2021, Dec. 1).

10. Neiman L.R., Demirchyan K.S. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki: v 2 t. 3-e izd. pererab. i dop.* [Theoretical foundations of electrical engineering. 2 vols. 3<sup>rd</sup> ed.]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1981, vol. 1, 536 p.
11. Serebryakov A.S., German L.A., Osokin V.L., Dmitrieva N.Yu. *Trekhstupenchataya fil'trokompensiruyushchaya ustanovka tyagovoi seti peremennogo toka* [Three-stage filter-compensating installation of AC traction network]. Patent RF, no. 2704023, 2019.
12. Serebryakov A.S., German L.A., Dulepov D.E., Semenov D.A. *Ustroystvo pereklyuchaemoi odnofaznoi poperechnoi emkostnoi kompensatsii v tyagovoi seti peremennogo toka* [Device for switchable single-phase transverse capacitive compensation in AC traction network]. Patent RF, no. 2475912, 2013.
13. Serebryakov A.S., German L.A., Osokin V.L., Dulepov D.E., Saevich V.L. *Pereklyuchae-maya fil'trokompensiruyushchaya ustanovka* [Switchable filter-compensating installation]. Patent RF, no. 2739329, 2020.
14. Rebrova I.A. *Raschet ustanovivshikhsya rezhimov v lineinykh elektricheskikh tsepyakh* [Calculation of steady-state modes in linear electrical circuits: teaching aid]. Omsk, SibADI Publ., 2013.
15. Serebryakov A.S. *Mathcad i reshenie zadach elektrotekhniki 2-e izd.* [Mathcad and electrical engineering problem solving. 2<sup>nd</sup> ed.]. Moscow, 2019, 568 p.
16. Serebryakov A.S. *Elektrotehnika i elektronika. laboratornyi praktikum na Electronics Workbench i Multisim* [Electrical and Electronics. laboratory practice at Electronics Workbench and Multisim. Tutorial.] Moscow, Higher School Publ., 2012, 335 p.
17. Serebryakov A.S., German L.A., Osokin V.L. *Issledovanie perekhodnykh protsessov v pereklyuchaemoi fil'trokompensiruyushchei ustanovke* [Investigation of transient processes in a switchable filter-compensating installation]. *Intellektual'naya elektrotehnika*, 2018, no. 2, pp. 84–92.
18. Serebryakov A.S., German L.A., Yakunin D.V., Maralova V.A., Maksimova A.A. *Dvukh-stupenataya ustanovka poperechnoi emkostnoi kompensatsii v tyagovykh setyakh zheleznykh dorog* [Two-stage installation of transverse capacitive compensation in traction networks of railways]. *Elektronika i elektrooborudovanie transporta*, 2016, no. 4, pp. 27–31.
19. Serebryakov A.S. *Perekhodnyi protsess v ustanovke kompensatsii reaktivnoi moshchnosti s posledovatel'nym vklyucheniem kondensatorov pri rasshuntirovanii odnogo iz nikh* [Transient process in the installation of reactive power compensation with sequential switching on of capacitors when shunting one of them]. *Izvestiya SPbGETU LETI*, 2021, no. 4, pp. 84–91.
20. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. *Instantaneous power theory and applications to power conditioning*. Hoboken, N.J., Wiley, 2007, 379 p.
21. Das J. *Passive filters-potentialities and limitations*. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 232–241.
22. Kim H., Blaabjerg F., Bak-Jensen D., Cho J. *Instantaneous power compensation in three-phase systems by using p-q-r theory*. In: *The IEEE 32<sup>nd</sup> Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC 2001*, Vancouver, Canada, June 17-21, 2001. Vancouver, 2001, vol. 2, pp. 478–485.
23. Tan P.-C., Loh P.C., Holmes D.G. *A robust multilevel hybrid compensation system for 25-kV electrified railway applications*. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2004, vol. 19, iss. 4, pp. 1043–1052. DOI: 10.1109/TPEL.2004.830038.

---

**ALEXANDER S. SEREBRYAKOV** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Electrification and Automation, Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Russia, Knyaginino (a.sereb@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7455-2348>).

**VLADIMIR L. OSOKIN** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Electrification and Automation, Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Russia, Knyaginino (osokinvl@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8772-4252>).

**DMITRY E. DULEPOV** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Electrification and Automation, Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Russia, Knyaginino (dulepov.86@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1044-1865>).

---

**Формат цитирования:** Серебряков А.С., Осокин В.Л., Дулепов Д.Е. Анализ переходных процессов в активно-емкостной цепи при последовательном включении конденсаторов // Вестник Чувашского университета. – 2022. – № 1. – С. 156–170. DOI: 10.47026/1810-1909-2022-1-156-170.