МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Чувашский государственный университет
имени И.Н. Ульянова"

В.И. АНТОНОВ Н.М. ЛАЗАРЕВА
А.А. ИЛЬИН В.С. ПЕТРОВ В.А. НАУМОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Чебоксары
Издательство Чувашского университета
2021

УДК 621.311:51
ББК 31.2
А ***

Рецензенты:

заведующий кафедрой промышленной электроники
д-р техн. наук, профессор Г.А. Белов;
профессор кафедры электроснабжения и интеллектуальных
электроэнергетических систем
д-р техн. наук, профессор Г.М. Михеев

Антонов В.И.

А *** Математические методы теории интеллектуальных электрических систем: учебное пособие / В.И. Антонов, Н.М. Лазарева, А.А. Ильин, В.С. Петров, В.А. Наумов, Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2021. 171 с.

ISBN ***

Рассматриваются математические методы теории интеллектуальных электрических систем, их приложения к анализу линейных и нелинейных систем. Излагаются основные методы исследования дискретных систем. Материал излагается компактно, с таким расчетом, чтобы раскрыть основные идеи методов анализа, не перегружая материал детальным обоснованием применимости излагаемых методов. Практически все положения излагаемых методов иллюстрируется примерами.

Для магистрантов, инженеров и аспирантов, так или иначе занимающихся исследованием электрических систем.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
Ответственный редактор д-р техн. наук, профессор Ю.Я. Лямец

УДК 621.311:51
ББК 31.2

ISBN ***

© Издательство Чувашского университета, 2021
© Антонов В.И., Лазарева Н.М., Ильин А.А.,
Петров В.С., Наумов В.А., 2021

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем издании излагаются математические методы теории интеллектуальных электрических систем, базирующиеся, главным образом, на использовании понятия системных функций. Весь материал так или иначе служит этой задаче, в связи с чем в учебном пособии наряду с теорией применения системных функций электрической системы как одного из примеров линейных систем рассматриваются отдельные разделы теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, основные положения гармонического анализа и спектрального представления сигналов.

Представленный в учебном пособии материал является компактным изложением математических методов с учетом той истины, что стремление к лаконичности не должно приводить к неоправданно "свободному" трактованию положений того или иного метода, а должно лишь упростить их понимание и практическое применение. Все разделы сопровождаются примерами.

В первой главе рассматриваются основные понятия и законы теории интеллектуальных электрических систем, формулируются методы составления дифференциальных уравнений "вход-выход" линейной системы, определения принужденных и свободных составляющих уравнения системы.

Во второй главе изложены вопросы устойчивости линейных непрерывных систем. Вводятся критерии Гурвица и Михайлова.

В третьей и четвертой главах рассмотрены элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления.

Пятая глава пособия вводит понятие системной функции. Рассматривается ее использование для анализа состояния электрической системы. Рассматриваются обобщенные частотные характеристики систем.

В шестой главе формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости замкнутых систем по критерию Найквиста. Приведена методика оценки запаса устойчивости по фазе и модулю.

В седьмой главе рассмотрены вопросы спектрального

анализа сигналов интеллектуальных электрических систем. Дано представление произвольного сигнала по заданной системе ортогональных функций.

Восьмая глава изучает эквивалентные характеристики нелинейных элементов и методы линеаризации нелинейных систем. Рассмотрен метод гармонической линеаризации. Изложены методы определения частоты автоколебаний нелинейной замкнутой системы и способы приближенного исследования устойчивости нелинейных систем, основанные на идее гармонического анализа.

В девятой и десятой главах приведены математические основы теории линейных импульсных систем. Описываются дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование. Рассмотрено решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами классическим методом и с помощью z-преобразования. Изложены правила приведения импульсного элемента к простейшей форме и алгоритм определения передаточной функции импульсной системы исходя из передаточной функции непрерывной части. Исследуются вопросы устойчивости импульсных систем.

В одиннадцатой главе рассматривается расчет составляющих волновых каналов интеллектуальной электрической системы на основе модальных преобразований, таких как, преобразования Кларк, Карренбауэра и Ведпола. Показывается, что все эти преобразования линейно связаны между собой.

Пособие предназначено для студентов высших технических учебных заведений, в первую очередь электротехнического и электроэнергетического направлений.

ГЛАВА 1

Линейные непрерывные системы

1.1 Линейная система

Линейной называется система, поведение которой в определенном интервале изменения ее координат описывается совокупностью линейных уравнений (уравнений первого порядка). Несмотря на то, что реально существующий объект обладает свойством линейности на ограниченном интервале изменения основных параметров, для облегчения изучения и решения физических задач приходится часто пренебрегать нелинейностью в поведении исследуемой системы. В таких случаях реальные объекты заменяются идеальными, которым приписывается свойство линейности. Допустимость такой замены полностью определяется природой изучаемой системы и требует от исследователя определенного опыта, поскольку часто такая замена может привести к значительным искажениям физической действительности.

Одним из фундаментальных свойств линейной системы является возможность представления ее выходного сигнала в виде суммы отдельных составляющих, каждая из которых может быть получена в предположении, что существует только такая составляющая. Это свойство получило название *принципа суперпозиции* (*наложения*). Совокупность упомянутых составляющих, которым свойственно порождать себе подобных на выходе линейной системы, будучи подведенным к ее входу, составляет *базис собственных сигналов* (*функций*) системы. Любой сигнал, принадлежащий базису собственных функций линейной системы, появляется на выходе системы, изменяя лишь свою амплитуду (и фазу в случае колебаний). Кроме того, действие сигнала на входе системы порождает в переходном режиме и иные составляющие, также принадлежащие базису собственных сигналов данной системы.

В случае если линейная система не изменяет своих параметров с течением времени, то основные характеристики системы не зависят от сдвига во времени. Потому такие системы называют

линейными инвариантными во времени системами (*ЛИВ-системами*), они описываются уравнениями с постоянными коэффициентами. В этом пособии будут рассматриваться преимущественно такие системы.

1.2 Динамические уравнения элементов электрических систем

Электрические источники энергии. Различают два вида источников: источник электродвижущей силы (ЭДС) – $e(t)$ (рис. 1.1, *а*) и источник тока – $J(t)$ (рис. 1.1, *б*).

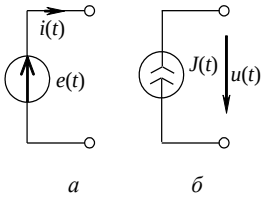


Рис. 1.1 Источники

В идеальном случае для первого характерна неизменность уровня напряжения, для второго – уровня тока независимо от нагрузки на зажимах. В этом случае говорят, что источники обладают бесконечной мощностью. У источника ЭДС внутреннее сопротивление равно нулю, а у источника тока – бесконечно велико. Поэтому источник ЭДС поддерживает на своих зажимах заданный уровень напряжения $e(t)$ независимо от значения тока $i(t)$, а источник тока – заданный уровень тока $J(t)$ независимо от напряжения $u(t)$.

Резистор (рис. 1.2) – элемент, создающий активное (с выделением тепловой энергии) сопротивление R току i_R. Для него справедлив закон Ома

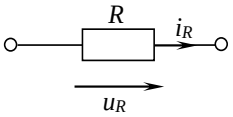


Рис. 1.2 Активное сопротивление

$$u_R(t) = Ri_R(t)\,. \qquad (1.1)$$

Выражение (1.1) представляет собой динамическое уравнение резистора. Оно может быть видоизменено

$$i_R(t) = R^{-1}u_R(t) = Gu_R(t)\,,$$

где G – проводимость резистора.

Катушка индуктивности (рис. 1.3, *а*) – элемент, запасающий электромагнитную энергию. Для катушки индуктивности справедлив закон Фарадея

$$u_L(t) = \frac{d\psi_L(t)}{dt}. \qquad (1.2)$$

Учитывая, что потокосцепление $\psi_L = L(t)i_L(t)$, уравнение (1.2) можно записать следующим образом:

$$u_L(t) = L(t)\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)\frac{dL(t)}{dt}.$$

Отсюда следует, что напряжение на катушке индуктивности (в дальнейшем – просто индуктивности) создается изменением как индуктивности, так и тока во времени.

Случай с переменной индуктивностью представляет собой общий теоретический случай. Во множестве практических применений индуктивность постоянна $(L = \text{const})$, в связи с чем

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}. \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) является дифференциальной формой динамического уравнения индуктивности. Используя его, можно перейти к интегральной форме уравнения

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau.$$

Таким образом, ток индуктивности $i_L(t)$ определяется всей предысторией процесса. Если известно значение тока индуктивности, например, в момент времени $t = 0$, то

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u_L(\tau)d\tau,$$

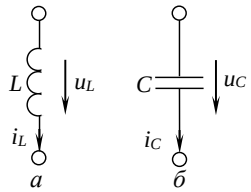


Рис. 1.3 Реактивные элементы: а – катушка индуктивности; б – конденсатор

где $i_L(0)$ – значение тока в начале отсчета времени t.

Конденсатор (рис. 1.3, *б*) – элемент, запасающий электрическую энергию. Ток через конденсатор равен

$$i_C = \frac{dq(t)}{dt},$$

где q – заряд конденсатора. Поскольку

$$q(t) = C(t)u_C(t)\,,$$

то динамическое уравнение конденсатора может быть расписано более детально

$$i_C(t) = C(t)\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)\frac{dC(t)}{dt}\,.$$

Случай с изменяющейся во времени емкостью ($C = \mathrm{var}$) является специальным, чаще всего емкость постоянна $(C = \mathrm{const})$. Поэтому

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}\,,\ C = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) представляет собой дифференциальную форму динамического уравнения конденсатора (емкости). В интегральной форме уравнение будет следующим:

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau\,, \qquad C = \mathrm{const}\,,$$

где $u_C(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(\tau)d\tau$ – напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$.

1.3 Активные элементы четырехполюсников: операционные усилители

Использование операционных усилителей (ОУ) расширяет возможности синтеза электрических систем и схем различного назначения, позволяя оперировать более обобщенными схематическими понятиями. Операционный усилитель усиливает напряжение $\Delta u = u_- - u_+$, т.е. ОУ является дифференциальным усилителем, с коэффициентом усиления K

$$u_{\text{вых}} = -K\Delta u\,. \tag{1.5}$$

Для облегчения синтеза и анализа схем часто пользуются понятием идеального ОУ.

Основные свойства идеального ОУ (рис. 1.4) заключаются в следующем:

а) коэффициент усиления K стремится к бесконечности (у реальных операционных усилителей K более 10^6);

б) выходное сопротивление стремится к нулю: $R_{\text{вых}} \to 0$. Это означает, что сигнал на выходе $u_{\text{вых}}$ поддерживается на неизменном уровне (при неизменном уровне входных сигналов) независимо от нагрузки $R_{\text{н}}$;

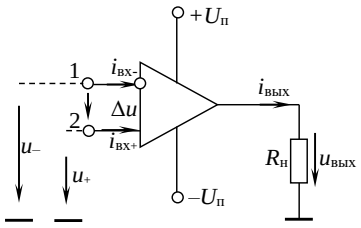


Рис. 1.4 Операционный усилитель

в) входное сопротивление стремится к бесконечности: $R_{\text{вх}} \to \infty$. Поэтому у идеального ОУ отсутствуют входные токи: $i_{\text{вх}-} \to 0$, $i_{\text{вх}+} \to 0$ (у реальных ОУ они составляют $10^{-6} \div 10^{-9}$ А).

1.4 Понятие обратной связи

Обратной связью называется механическая или электрическая цепь, подводящая ко входу системы часть ее выходного сигнала. Например, для схемы рис. 1.5 цепь обратной связи представлена в виде усилителя

$$u_{\text{обр}} = K_{\text{ос}} u_1,$$

где $K_{\text{ос}}$ – коэффициент усиления цепи обратной связи. В зависимости от того, содействует ли сигнал обратной связи $u_{\text{обр}}$ повышению выходного сигнала u_1 или противодействует ему, говорят о положительной или отрицательной обратной связи.

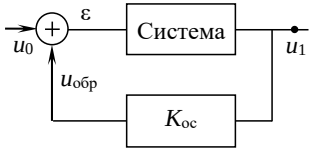


Рис. 1.5 Система с обратной связью

Пример 1.1 *Включение ОУ по схеме инвертирующего усилителя (рис. 1.6).*

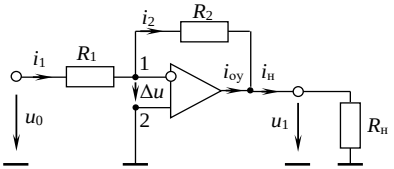


Рис. 1.6 Инвертирующий усилитель на ОУ

Поскольку часть сигнала u_1 с выхода ОУ через резистор R_2 подводится к инвертирующему входу, то обратная связь является отрицательной. Покажем, что под действием обратной связи разность потенциалов точек 1 и 2 в схеме поддерживаются равной нулю: $\Delta u = 0$.

Используя обозначения рис. 1.6, получим

$$u_0 = R_1 i_1 + \Delta u \,, \tag{1.6}$$

$$u_1 = -R_2 i_2 + \Delta u \,. \tag{1.7}$$

В силу свойства в) операционного усилителя

$$i_1 = i_2 \,. \tag{1.8}$$

Решая уравнения (1.5)-(1.8) совместно, получим

$$\Delta u = \frac{u_0}{1 + (K+1)\dfrac{R_1}{R_2}} \,.$$

Поскольку входной сигнал u_0 ограничен, то при $K \to \infty$ разность $\Delta u \to 0$.

Учитывая это обстоятельство, при анализе схем четырехполюсников с ОУ в дальнейшем будем исходить из предположения, что $\Delta u = 0$. Отметим, что операционный усилитель при этом должен работать в усилительном режиме (по меньшей мере должна существовать цепь, соединяющая выход ОУ с инвертирующим входом).

Тогда из уравнений (1.6) и (1.7) следует, что

$$u_1 = -\frac{R_2}{R_1} u_0 = k u_0 \,. \tag{1.9}$$

Здесь $k = -\dfrac{R_2}{R_1}$ – коэффициент усиления схемы. Из-за того, что он отрицательный, такое включение ОУ получило название схемы инвертирующего усилителя.

Отметим, что уровень сигнала u_1, определяемого выражением (1.9), поддерживается усилителем независимо от значения резистора $R_н$ за счет увеличения или уменьшения тока на выходе ОУ $i_{оу}$, поскольку

$$i_н = \frac{u_1}{R_н} = i_2 + i_{оу} = -\frac{u_1}{R_2} + i_{оу} \,.$$

1.5 Дифференциальное уравнение типа "вход-выход" для четырехполюсника

Линейный четырехполюсник п-го порядка сложности описывается в общем случае интегро-дифференциальными уравнениями. Дифференцируя их, можно получить некоторую систему дифференциальных уравнений вида

$$F_k\left(t,\ u_0,\ u_0',\ldots,u_0^{(m_{0k})},\ u_1,\ u_1',\ldots,u_1^{(m_{1k})},\ldots,u_p,\ u_p',\ldots,u_p^{(m_{pk})}\right)=0,$$
$$\left(k=\overline{1,\ p}\right),\quad \max_{i=\overline{1,\ p}}\left\{m_{ik}\right\}\le n\ , \tag{1.10}$$

где (в соответствии с принятыми нами обозначениями) u_0 и u_1 – сигналы на входе и выходе четырехполюсника; $u_2, u_3, \ldots, u_p$ – промежуточные сигналы, действующие внутри четырехполюсника.

Во множестве случаев удается разрешить систему (1.10) относительно u_0 и u_1, последовательно исключая промежуточные переменные из уравнений. В итоге получается единственное дифференциальное уравнение *n*-го порядка типа "вход-выход"

$$F\left(u_1^{(n)},\ldots,u_1',\ u_1\right)=Q\left(u_0^{(m)},\ldots,u_0',\ u_0\right). \tag{1.11}$$

Уравнение типа "вход-выход" в теории электрических систем играет существенную роль. В связи с этим рассмотрим его свойства более подробно.

1.6 Составление уравнений типа "вход-выход" для четырехполюсников

1.6.1 Использование законов Кирхгофа

Для получения уравнений выполняются следующие шаги:

1. Определяется число уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа. Пусть m – число ветвей схемы (включая ветви со входным источником u_0 и выходным сигналом u_1), n – число узлов. Тогда число уравнений по первому закону

Кирхгофа равно $n-1$, а по второму закону $m-n+1$. Общее число независимых уравнений m.

2. Выбираются независимые контуры; составляются уравнения по законам Кирхгофа.

3. К полученной системе добавляются динамические уравнения элементов.

4. Путем исключения переменных получают необходимое дифференциальное уравнение типа "вход-выход".

Пример 1.2 *Найти дифференциальное уравнение четырехполюсника, представленного на рис. 1.7*

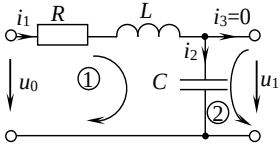


Рис. 1.7

Число ветвей данного четырехполюсника $m=3$, число узлов $n=2$. Согласно п. 1 изложенного метода система уравнений будет включать два уравнения по второму закону Кирхгофа

$$u_0 = i_1 R + L\frac{di_1}{dt} + u_C\,, \tag{1.12}$$

$$u_C = u_1\,, \tag{1.13}$$

и одно уравнение по первому закону Кирхгофа

$$i_1 = i_2\,. \tag{1.14}$$

Добавим к системе динамическое уравнение емкости

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_2 dt\,. \tag{1.15}$$

Подставим (1.13) в (1.12)

$$u_0 = i_1 R + L\frac{di_1}{dt} + u_1\,. \tag{1.16}$$

Решим совместно (1.13) и (1.15)

$$i_2 = C\frac{du_1}{dt} = Cu_1'\,. \tag{1.17}$$

Учитывая (1.14) и (1.17), из (1.16) получим искомое уравнение типа "вход-выход"

$$LCu_1'' + RCu_1' + u_1 = u_0\,. \tag{1.18}$$

1.6.2 Метод узловых потенциалов

Метод заключается в выполнении следующих шагов:

1. Выбирается базовый узел. Уравнения получаются

наиболее простыми, если выбранный базовый узел является общим для входного и выходного сигнала или наибольшего числа ветвей.

2. В схеме размечаются узлы (здесь – точки соединения двух и более элементов) и для каждого из них составляется уравнение по первому закону Кирхгофа. При этом из двух узлов, к которым подключается источник напряжения, следует обозначать только один (если один из них является базовым, то другой не обозначается вовсе).

3. Токи выражаются через разности потенциалов отмеченных узлов. Число уравнений цепи, составленных таким образом, будет равно числу выделенных узлов.

4. Путем исключения переменных получают необходимое дифференциальное уравнение типа "вход-выход".

Пример 1.3 *По методу узловых потенциалов составить дифференциальное уравнение четырехполюсника, приведенного на рис. 1.8*

Примем за базовый узел с номером 0: он является общим для входного и выходного сигналов.

Выделим два узла: 2 и 3. Узел 1 по правилу 2 при составлении уравнений не учитываем. Запишем для выделенных узлов уравнения по законам Кирхгофа

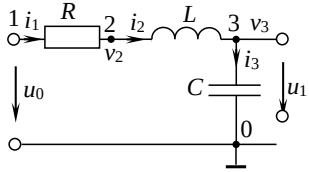


Рис. 1.8

$$i_1 = i_2 \text{ , (узел 2)}$$

$$i_2 = i_3 \text{ . (узел 3)}$$

Выразим токи через разности потенциалов

$$\frac{u_0 - v_2}{R} = \frac{1}{L}\int (v_2 - v_3)dt \quad , \tag{1.19}$$

$$\frac{1}{L}\int (v_2 - v_3)dt = C\frac{dv_3}{dt} \quad . \tag{1.20}$$

Подставим (1.20) в (1.19) и, учитывая, что $v_3 = u_1$, получим

$$v_2 = u_0 - RCu_1' \text{ .} \tag{1.21}$$

Совместное решение (1.20) и (1.21) дает уравнение (1.18).

1.6.3 Метод переменных состояния

Алгоритм составления уравнений по методу переменных состояния[1*] следующий:

1. Каждая индуктивность L_j и емкость C_k заменяются соответственно на источник тока i_j и источник напряжения u_k. Их направления совпадают с положительными направлениями токов и напряжений в этих элементах.

2. В полученной ветви определяются напряжения u_j на зажимах источников тока i_j и токи i_k в источниках напряжения u_k.

3. Производится замена

$$i_k = C_k u_k' ,$$
$$u_j = L_j i_j' .$$

4. Путем исключения переменных получают необходимое дифференциальное уравнение типа "вход-выход".

Пример 1.4 *По методу переменных состояния составить уравнения цепи рис. 1.8.*

1. Заменяя в схеме рис. 1.8 индуктивности на источники тока, а емкости на источники напряжения, получаем схему, представленную на рис. 1.9.

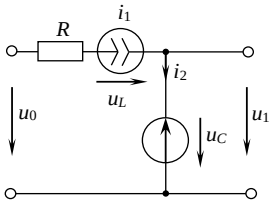


Рис. 1.9

2. Определим напряжение u_L и ток i_2 источников

$$u_L = u_0 - Ri_1 - u_C ,$$
$$i_2 = i_1 .$$

3. Заменим u_L и i_2 на динамические уравнения

$$u_L = Li_1' , \; i_2 = Cu_C' .$$

Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши (с выделением в левой части каждого уравнения одной единственной производной):

[1*] Переменными состояния являются ток в индуктивности $i_L(t)$ и напряжение на емкости $u_C(t)$ (более подробно см. разд. 1.8.2).

$$\begin{cases} Li_1' = u_0 - Ri_1 - u_C, & (1.22) \\ Cu_C' = i_1. & (1.23) \end{cases}$$

Учитывая, что $u_C = u_1$, из уравнений (1.22) и (1.23) , получим уравнение (1.18).

Примечание. Все изложенные методы на третьем шаге дают систему дифференциальных уравнений, но только метод переменных состояния дает систему в форме Коши. Поэтому метод переменных состояния предпочтителен при составлении системы уравнений четырехполюсника.

1.7 Решение дифференциального уравнения типа "вход-выход"

Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В связи с этим уравнению (1.11) можно придать более конкретный вид

$$a_n u_1^{(n)} + a_{n-1} u_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 u_1 = f(u_0), \tag{1.24}$$

где величины u_0 и u_1 – функции времени t, а коэффициенты $a_i = \text{const} \ \left(i = \overline{0,\ n}\right)$

Выражение (1.24) называется *неоднородным дифференциальным уравнением* n-го порядка. Его решение равно сумме общего решения $u_{1\,\text{св}}$ однородного уравнения

$$a_n u_1^{(n)} + a_{n-1} u_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 u_1 = 0 \tag{1.25}$$

и какого-либо частного решения $u_{1\,\text{пр}}$ неоднородного уравнения (1.24)

$$u_1 = u_{1\,\text{св}} + u_{1\,\text{пр}}. \tag{1.26}$$

В электротехнике решение $u_{1\text{св}}$ называется *свободной составляющей* и представляет собой сигнал на выходе четырехполюсника при скачкообразном изменении правой части $f(u_0)$ уравнения (1.24) до нуля; решение $u_{1\,\text{пр}}$ носит название *принужденной составляющей* и соответствует сигналу на выходе

четырехполюсника в установившимся режиме, ее состав зависит только от структуры $f(u_0)$.

1.7.1 Общее решение однородного уравнения (свободное движение системы)

Общее решение однородного уравнения (1.25) состоит из совокупности частных решений $u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n}$

$$u_1 = c_1 u_{11} + c_2 u_{12} + \cdots + c_n u_{1n}, \tag{1.27}$$

где $c_1,\ c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

Поскольку экспоненциальная функция является собственной функцией линейной системы, то частные решения следует искать в виде

$$u_{1\text{св}} = e^{\lambda t}. \tag{1.28}$$

Подставляя (1.28) в (1.25) получим

$$\begin{aligned} &a_n (e^{\lambda t})^{(n)} + a_{n-1}(e^{\lambda t})^{(n-1)} + \cdots + a_0 e^{\lambda t} = \\ &= e^{\lambda t}(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0) = 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, то уравнение (1.29) удовлетворяется лишь при выполнении следующего равенства:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0. \tag{1.30}$$

Из уравнения (1.30) видно, что решениями однородного уравнения могут быть экспоненты с показателями $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, поскольку для каждого из них $e^{\lambda_i t} \neq 0$, но в (1.30) найдется сомножитель $\lambda - \lambda_i$, равный нулю при $\lambda = \lambda_i$. Следовательно, уравнение (1.30) определяет число и вид частных решений уравнения (1.25), в связи с чем и носит название *характеристического*, а λ_i называются корнями характеристического уравнения.

А. Корни характеристического уравнения действительные и разные

В этом случае частные решения имеют следующий вид:

$$u_{11} = e^{\lambda_1 t}, u_{12} = e^{\lambda_2 t}, ..., u_{1n} = e^{\lambda_n t},$$

а общее решение уравнения (1.25) в соответствии с (1.27) запишется следующим образом:

$$u_{1\text{св}} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Пример 1.5 *Определить вид свободного решения однородного уравнения* $u_1' + a u_1 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda + a = 0.$$

Корень $\lambda = -a$. *Тогда общее решение уравнения состоит из одного частного решения*

$$u_{1\text{св}} = c_1 e^{-at}.$$

Б. Корни характеристического уравнения комплексные

Поскольку коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ в (1.30) действительные, то каждому комплексному корню $\underline{\lambda}_k = \sigma_k + j\omega_k$ обязательно соответствует сопряженный корень $\underline{\lambda}_k^* = \sigma_k - j\omega_k$. Здесь символ "$*$" означает сопряжение. Этим корням соответствуют частные решения

$$u_{1k} = e^{\underline{\lambda}_k t}, \quad u_{1(k+1)} = e^{\underline{\lambda}_{k+1} t} = e^{\underline{\lambda}_k^* t}. \tag{1.31}$$

В общее решение уравнения (1.25) они вносят следующий вклад:

$$v = a_k u_{1k} + a_{k+1} u_{1(k+1)} = a_k e^{\underline{\lambda}_k t} + a_{k+1} e^{\underline{\lambda}_k^* t} =$$
$$= a_k e^{(\sigma_k + j\omega_k)t} + a_{k+1} e^{(\sigma_k - j\omega_k)t} = e^{\sigma_k t}\left(a_k e^{j\omega_k t} + a_{k+1} e^{-j\omega_k t}\right).$$

Применяя формулу Эйлера к комплексным экспонентам

$$e^{\pm j\omega_k t} = \cos\omega_k t \pm j \sin\omega_k t,$$

получим, что

$$v = e^{\sigma_k t}\left[\left(a_k + a_{k+1}\right)\cos\omega_k t + j\left(a_k - a_{k+1}\right)\sin\omega_k t\right].$$

Поскольку уравнение (1.25) с действительными коэффициентами, то его решение также является вещественной функцией. Поэтому сумма коэффициентов должна дать вещественное

число, а разность – мнимое число. Отсюда следует, что частные решения вида (1.31) могут быть заменены решениями вида

$$u_{1k} = e^{\sigma_k t}\cos\omega_k t, \quad u_{1(k+1)} = e^{\sigma_k t}\sin\omega_k t\,, \tag{1.32}$$

а общее решение может быть записано следующим образом:

$$u_{1\text{св}.k} = e^{\sigma_k t}(c_k\cos\omega_k t + c_{k+1}\sin\omega_k t)\,.$$

Пример 1.6 *Определить вид свободного решения однородного уравнения* $u_1'' + 8u_1' + 20u_1 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 8\lambda + 20 = 0\,.$$

Корни

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-20} = -4 \pm 2j$$

согласно (1.32) обусловливают частные решения

$$u_{11} = e^{-4t}\cos 2t, \quad u_{12} = e^{-4t}\sin 2t\,.$$

Тогда общее решение уравнения равно

$$u_{1\text{св}} = e^{-4t}\left(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t\right).$$

В. Корни характеристического уравнения вещественные и кратные

Пусть среди корней характеристического уравнения есть корень λ_k кратности r . Ему соответствуют r частных решений вида

$$e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t},\ \ldots,\ t^{r-1}e^{\lambda_k t}\,. \tag{1.33}$$

Тогда решение уравнения (1.25) содержит в себе составляющую вида

$$u_{1k} = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_{r-1}t^{r-1})e^{\lambda_k t}\,.$$

Пример 1.7 *Определить вид свободного решения однородного уравнения*

$$u_1''' + 3u_1'' + 3u_1' + u_1 = 0\,.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

или

$$(\lambda+1)^3 = 0\,.$$

Корню $\lambda = -1$ кратности $r = 3$ соответствуют частные решения

$$u_{11} = e^{-t},\ u_{12} = te^{-t},\ u_{13} = t^2 e^{-t}.$$

Согласно (1.33) общее решение уравнения будет иметь вид

$$u_{1\text{св}} = e^{-t}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2).$$

1.7.2 Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (принужденный режим системы)

Пусть $D_k(t),\ Q_k(t),\ R_k(t),\ S_k(t)$ – многочлены степени k.

1. Если правая часть уравнения (1.24) имеет вид

$$f(u_0) = Q_k(t)e^{\sigma t}, \tag{1.34}$$

то его частное решение ищется в виде

$$u_{1\,\text{пр}} = R_k(t)e^{\sigma t}, \tag{1.35}$$

если σ не является корнем характеристического уравнения, или в виде

$$u_{1\text{пр}} = t^r R_k(t)e^{\sigma t}, \tag{1.36}$$

если σ является *r*-кратным корнем характеристического уравнения (1.25).

2. Если

$$f(u_0) = D_p(t)e^{\sigma t}\cos\omega t + Q_k(t)e^{\sigma t}\sin\omega t, \tag{1.37}$$

то частное решение ищется в виде

$$u_{1\,\text{пр}} = e^{\sigma t}\left[R_q(t)\cos\omega t + S_q(t)\sin\omega t\right], \tag{1.38}$$

если $\sigma \pm j\omega$ не является корнем характеристического уравнения (1.25), или в виде

$$u_{1\,\text{пр}} = t^r e^{\sigma t}\left[R_q(t)\cos\omega t + S_q(t)\sin\omega t\right],$$

если $\sigma \pm j\omega$ является *r*-кратным корнем характеристического уравнения системы. Здесь $q = \max\{k,\ p\}$.

Во всех случаях $R_q(t)$ и $S_q(t)$ – многочлены с неопределенными постоянными. Кроме того, если правая часть уравнения (1.24) представлена комбинацией функций (1.34), (1.35) и (1.37),

(1.38), то частное решение равно сумме решений, соответствующих каждому члену линейной комбинации.

Пример 1.8 *Определить принужденное решение уравнения* $u_1' + 100u_1 = e^{-100t}$.

Корень характеристического уравнения $\lambda = -100$ с$^{-1}$. Он совпадает с коэффициентом затухания экспоненты в правой части уравнения. Согласно (1.36)

$$u_{1\text{пр}} = c_1 t e^{-100t}. \qquad (1.39)$$

Коэффициент c_1 найдем, подставив (1.39) в исходное уравнение

$$c_1 e^{-100t} - 100c_1 t e^{-100t} + 100c_1 t e^{-100t} = e^{-100t}.$$

Отсюда $c_1 = 1$, $u_{1\text{пр}} = te^{-100t}$.

1.8 Определение реакции четырехполюсника классическим методом

1.8.1 Предшествующий и послекоммутационный режимы

Примем момент скачкообразного изменения входного сигнала u_0 за нуль. Тогда по левую сторону от $t = 0$ будет находиться предшествующий режим, а по правую – послекоммутационный (режим после изменения u_0 или правой части $f(u_0)$ уравнения (1.24)). Поскольку в точке $t = 0$ сходятся два процесса, то она принадлежит обоим процессам и имеет особый статус. Для внесения определенности в статус этой точки в электротехнике момент коммутации на оси времени t представляют как совокупность двух точек: $t = 0-$ и $t = 0+$. Точка $t = 0-$ принадлежит предшествующему режиму, а $t = 0+$ – послекоммутационному. Соответственно представляются и все остальные величины, характеризующие процесс. Например, значение электрической величины $u_1(t)$ в момент $t = 0-$ определяется как предельное значение $u_1(t)$ при подходе к точке $t = 0$ слева

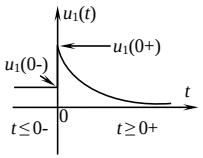


Рис. 1.10

$$u_1(0-) = \lim_{t \to 0-} u_1(t)\ ,$$

а в момент $t = 0+$ – как предельное приближение справа по оси t (рис. 1.10)

$$u_1(0+) = \lim_{t \to 0+} u_1(t)\ .$$

1.8.2 Законы коммутации

Основной закон коммутации можно выразить следующим образом: *переменные состояния системы не могут изменяться скачком.*

В электротехнике переменными состояния являются потокосцепление ψ (ток в индуктивности i_L при $L = \text{const}$) и заряд q (напряжение на емкости u_C при $C = \text{const}$). Применительно к ним законы коммутации формулируются следующим образом (рис. 1.11):

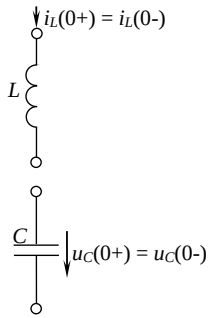


Рис. 1.11

1. *Потокосцепление* ψ *(ток в индуктивности* i_L*) не может изменяться скачком*, т.е. в момент коммутации выполняются следующие равенства:

$$\psi(0-) = \psi(0+)\ , \tag{1.40}$$

$$i_L(0-) = i_L(0+), \quad (L = \text{const})\ . \tag{1.41}$$

2. *Заряд* q *конденсатора (напряжение на емкости* u_C*) не может изменяться скачком*, т.е. в момент коммутации справедливы следующие зависимости:

$$q(0-) = q(0+)\ , \tag{1.42}$$

$$u_C(0-) = u_C(0+), \quad (C = \text{const})\ . \tag{1.43}$$

1.8.3 Обобщенные законы коммутации

Есть особые случаи, когда законы (1.41)-(1.43) нарушаются. Для этих случаев формулируют обобщенные законы коммутации.

1. Если в схеме после коммутации образовался контур, состоящий из индуктивных элементов или из индуктивных элементов и источников тока, то в момент коммутации алгебраическая сумма потокосцеплений упомянутого контура непрерывна

$$\sum \psi(0-) = \sum \psi(0+) . \qquad (1.44)$$

Потокосцепление индуктивности берется со знаком "+", если направление обхода контура совпадает с принятым направлением тока в индуктивности.

Пример 1.9 *Определить токи в индуктивностях в момент* $t = 0+$, *если* $i_2(0-) = 0$ *(рис. 1.12).*

Ток $i_1(0-) = \dfrac{E}{R}$. После размыкания ключа S индуктивность L_1 стремится поддерживать ток $i_1(0-)$, а индуктивность L_2 – ток $i_2(0-) = 0$. Поскольку индуктивности составляют последовательную цепь, то по закону Кирхгофа их токи в момент $t = 0+$ должны быть одинаковы: $i_1(0+) = -i_2(0+)$, что нарушает закон (1.41), так как $i_1(0+) \neq i_1(0-)$, а $i_2(0+) \neq i_2(0-)$. Поэтому нужно применить обобщенный закон (1.44)

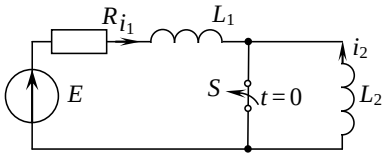


Рис. 1.12

$$L_1 i_1(0-) - L_2 i_2(0-) = L_1 i_1(0+) - L_2 i_2(0+) .$$

Подставим известные величины, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} i_1(0+) = -i_2(0+), \\ \dfrac{L_1 E}{R} = L_1 i_1(0+) - L_2 i_2(0+), \end{cases}$$

откуда следует, что

$$i_1(0+) = -i_2(0+) = \frac{E}{R}\frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

2. Если в схеме после коммутации образовались контуры,

состоящие только из емкостей или из емкостей и источников напряжения, то в момент коммутации алгебраическая сумма зарядов емкостей, присоединенных к общему узлу, непрерывна

$$\sum q(0-) = \sum q(0+) . \qquad (1.45)$$

Знак заряда считается положительным, если напряжение на емкости направлено от узла.

Пример 1.10 *Найти напряжения на конденсаторах в момент* $t = 0+$, *если* $u_2(0-) = 0{,}5E$ *и* $u_1(0-) = 0$ *(рис. 1.13).*

В этой схеме не выполняются законы (1.42) и (1.43).Применим обобщенный закон (1.45) для узла *a*, получим

$$C_2u_2(0-) - C_1u_1(0-) = \\ = C_2u_2(0+) - C_1u_1(0+). \qquad (1.46)$$

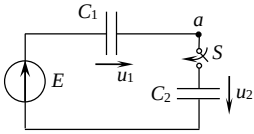


Рис. 1.13

Кроме того, должен выполняться второй закон Кирхгофа

$$u_1(0+) + u_2(0+) = E . \qquad (1.47)$$

Подставим в (1.46) и (1.47) известные значения

$$\begin{cases} 0{,}5EC_2 = C_2u_2(0+) - C_1u_1(0+), \\ E = u_1(0+) + u_2(0+). \end{cases}$$

Совместное решение уравнений дает следующий результат:

$$u_1(0+) = \frac{C_2E}{2(C_1 + C_2)}, \quad u_2(0+) = \frac{(2C_1 + C_2)E}{2(C_1 + C_2)} .$$

1.8.4 Начальные условия определение постоянных интегрирования

Решение неоднородного уравнения (1.24) состоит из совокупности частных решений

$$u_1(t) = c_1u_{11}(t) + c_2u_{12}(t) + \cdots + c_nu_{1n}(t) + u_{1\,\text{пр}}(t) .$$

Принужденная составляющая определяется непосредственно из уравнения (1.25) по виду правой части (п. 1.7.2). Для определения постоянных интегрирования необходимо составить систему из *n* уравнений

$$\begin{cases} u_1(0+) = c_1 u_{11}(0+) + c_2 u_{12}(0+) + \cdots + c_n u_{1n}(0+) + u_{1\text{пр}}(0+), \\ u_1'(0+) = c_1 u_{11}'(0+) + c_2 u_{12}'(0+) + \cdots + c_n u_{1n}'(0+) + u_{1\text{пр}}'(0+), \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ u_1^{(n-1)}(0+) = c_1 u_{11}^{(n-1)}(0+) + c_2 u_{12}^{(n-1)}(0+) + \cdots + c_n u_{1n}^{(n-1)}(0+) + u_{1\text{пр}}^{(n-1)}(0+). \end{cases} \tag{1.48}$$

Величины $u_1(0+)$, $u_1'(0+)$, ..., $u_1^{(n-1)}(0+)$ называются *начальными условиями*; они определяются из уравнений четырехполюсника, составленных по законам Кирхгофа после коммутации с учетом переменных состояния.

1.8.5 Определение реакции четырехполюсника на входное воздействие

Для определения реакции выполняются следующие действия:

1. Составляется система дифференциальных уравнений четырехполюсника и преобразуется к уравнению типа "вход-выход".

2. Определяется решение однородного уравнения (свободный режим):

а) формируется характеристическое уравнение и находятся его корни;

б) по корням характеристического уравнения определяется вид общего решения $u_{1\text{св}}$.

3. Определяется частное решение неоднородного уравнения (принужденный режим):

а) записывается правая часть уравнения $f(u_0)$;

б) по виду $f(u_0)$ и с учетом корней характеристического уравнения определяется вид частного решения $u_{1\,\text{пр}}(t)$;

в) частное решение $u_{1\,\text{пр}}(t)$ подставляется в неоднородное уравнение, и тем самым определяются произвольные постоянные, присутствующие в $u_{1\,\text{пр}}(t)$.

4. Составляется система уравнений для определения про-

извольных постоянных общего решения $u_{1\,\text{св}}(t)$ однородного уравнения.

5. По схеме до коммутации определяются переменные состояния в момент $t = 0-$.

6. Записываются уравнения четырехполюсника после коммутации для $t = 0+$. Используя переменные состояния и уравнения системы, определяются необходимые начальные условия: $u_1(0+)$, $u_1'(0+)$, ..., $u_1^{(n-1)}(0+)$, где $n-$ число произвольных постоянных, подлежащих определению.

Пример 1.11 *Определить реакцию четырехполюсника (рис. 1.14) на входное воздействие* $u_0 = 10 + 20e^{-200t}$.

Параметры цепи: $R/L = 200$ с, $LC = 10^{-4}$ с$^{-2}$. До коммутации четырехполюсник находился под воздействием напряжения $u_0 = 10$ В.

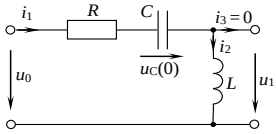


Рис. 1.14

Составляем дифференциальное уравнение цепи. Четырехполюсник описывается

$$u_0 = Ri_1 + u_C + u_1, \tag{1.49}$$

$$i_1 = i_2, \tag{1.50}$$

$$u_1 = L\frac{di_2}{dt}, \tag{1.51}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_1 dt. \tag{1.52}$$

следующими уравнениями:

Подставим (1.52) в (1.49)

$$u_0 = Ri_1 + \frac{1}{C}\int i_1 dt + u_1. \tag{1.53}$$

Неизвестный ток i_1 найдем из уравнений (1.50) и (1.51)

$$i_1 = \frac{1}{L}\int u_1 dt. \tag{1.54}$$

С учетом (1.54) уравнение (1.53) примет следующий вид:

$$u_0 = \frac{R}{L}\int u_1 dt + \frac{1}{C}\int\left(\frac{1}{L}\int u_1 dt\right)dt + u_1.$$

Дифференцируя два раза, получим

$$u_1'' + \frac{R}{L}u_1' + \frac{1}{CL}u_1 = u_0'' \,. \qquad (1.55)$$

Подставляя в (1.55) исходные данные, получим искомое дифференциальное уравнение типа "вход-выход"

$$u_1'' + 200u_1' + 10^4 u_1 = 8\cdot 10^5 e^{-200t} \,.$$

Решаем однородное уравнение (определяем свободную составляющую)

$$u_1'' + 200u_1' + 10^4 u_1 = 0 \,.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 200\lambda + 10^4 = 0 \,.$$

Корни $\lambda_{1,2} = -100\ \text{с}^{-1}$ кратные, кратность $r = 2$. Общее решение будет иметь вид

$$u_{1\text{св}} = (c_1 + c_2 t)e^{-100t} \,. \qquad (1.56)$$

Определяем частное решение $u_{1\text{пр}}$ неоднородного уравнения (принужденную составляющую)

$$u_{1\text{пр}}'' + 200u_{1\text{пр}}' + 10^4 u_{1\text{пр}} = 8\cdot 10^5 e^{-200t} \,. \qquad (1.57)$$

Правая часть (1.57) равна $f(u_0) = 8\cdot 10^5 e^{-200t}$. В соответствии с (1.36) частное решение

$$u_{1\text{пр}} = c_3 e^{-200t} \,.$$

Подставив его в (1.57) получим уравнение для определения c_3

$$4\cdot 10^4 c_3 e^{-200t} - 4\cdot 10^4 c_3 e^{-200t} + 10^4 c_3 e^{-200t} = 8\cdot 10^5 e^{-200t} \,.$$

Откуда следует, что $c_3 = 80$ В. Тогда

$$u_{1\text{пр}} = 80e^{-200t} \qquad (1.58)$$

Составим систему уравнений для определения произвольных постоянных c_1 и c_2. Согласно (1.26), (1.56) и (1.58)

$$u_1 = (c_1 + c_2 t)e^{-100t} + 80e^{-200t} \,.$$

Поскольку искомых постоянных только две, то система (1.48) примет следующий вид:

$$u_1(0+) = c_1 + 80 \,, \qquad (1.59)$$

$$u_1'(0+) = -100c_1 + c_2 - 1600 \,. \qquad (1.60)$$

Определим переменные состояния. Для этого рассматриваем схему до коммутации. Учитывая, что до коммутации на входе четырехполюсника действовало постоянное напряжение и процесс носил установившийся характер, получаем, что ток в цепи

$$i_1(t) = i_2(t) = 0 \,. \qquad (1.61)$$

Тогда из (1.49) с учетом того, что $u_1(t) = 0$, следует:

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 10 \text{ В}, \tag{1.62}$$

а из (1.61)

$$i_2(0+) = i_2(0-) = i_1(0-) = i_1(0+) = 0. \tag{1.63}$$

Определим начальные условия $u_1(0+)$ и $u_1'(0+)$. Для этого воспользуемся уравнением (1.49). Учитывая (1.50), (1.63), (1.63) получаем

$$u_1(0+) = u_0(0+) - u_C(0+) = 30 - 10 = 20 \text{ В}. \tag{1.64}$$

Чтобы найти $u_1'(0+)$, продифференцируем (1.49)

$$u_1'(0+) = u_0'(0+) - Ri_1'(0+) - u_C'(0+). \tag{1.65}$$

Из (1.52) следует, что $u_C'(0+) = i_1(0+)/C = 0$, а из (1.50) и (1.51) $i_1'(0+) = u_1(0+)/L$. Поэтому согласно (1.65)

$$u_1'(0+) = -4000 - 20R/L = -8000 \text{ В/с} \tag{1.66}$$

Решая совместно (1.59), (1.60), (1.64) и (1.66) получим

$$c_1 = -60 \text{ В}, \; c_2 = -400 \text{ В/с}.$$

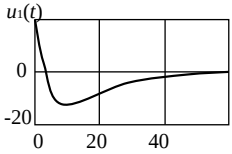


Рис. 1.15

График изменения сигнала на выходе четырехполюсника $u_1 = (-60 - 400t)e^{-100t} + 80e^{-200t}$ представлен на рис. 1.15.

1.9 Решение уравнений многомерных систем (системы со многими выходами)

Пусть как и прежде u_0 – входной, u_1 – выходной и $u_2, u_3, ..., u_n$ – промежуточные сигналы четырехполюсника. Тогда система дифференциальных уравнений четырехполюсника может быть записана в виде

$$\begin{cases} u_1' = & a_{11}u_1 + & a_{12}u_2 + & a_{1n}u_n + & f_1(u_0), \\ u_2' = & a_{21}u_1 + & a_{22}u_2 + & a_{2n}u_n + & f_2(u_0), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n' = & a_{n1}u_1 + & a_{n2}u_2 + & a_{nn}u_n + & f_n(u_0), \end{cases} \tag{1.67}$$

где $f_1(u_0), f_2(u_0), \dots, f_n(u_0)$ – правые части, зависящие только от входного сигнала u_0. Уравнения (1.67) для компактности можно записать в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}\ , \tag{1.68}$$

где

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(u_0) \\ f_2(u_0) \\ \vdots \\ f_n(u_0) \end{bmatrix}.$$

Решение системы (1.68) состоит из совокупности векторов-решений $\mathbf{u}_{1\text{св}}, \mathbf{u}_{2\text{св}}, \dots, \mathbf{u}_{n\text{св}}$

$$\mathbf{u}_{\text{св}} = c_1\mathbf{u}_{1\text{св}} + c_2\mathbf{u}_{2\text{св}} + \dots + c_n\mathbf{u}_{n\text{св}}\ ,$$

(где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные постоянные) однородной системы

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}\,, \tag{1.69}$$

и частного вектора-решения $\mathbf{u}_{\text{пр}}$ неоднородного уравнения (1.68)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{пр}} + \mathbf{u}_{\text{св}}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_{2\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{u}_{n\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix},$$

где u_{ij}, $\left(i = \overline{1,\ n},\ \ j = \overline{1,\ n}\right)$ – частные решения. Индекс i соответствует номеру искомой переменной, а индекс j – номеру частного решения.

1.9.1 Решение однородной системы (свободный режим)

Вид частных решений системы (1.69) определяет характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,, \tag{1.70}$$

где I – единичная матрица. В развернутой (1.70) примет следующий вид:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{12} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.71)$$

А. Корни характеристического уравнения различные и действительные

В этом случае корням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ соответствуют частные решения

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_{2\text{св}} = e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix},\ ...,\ \mathbf{u}_{n\text{св}} = e^{\lambda_n t}\begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix},$$

где b_{ij} $\left(i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ n}\right)$ – произвольные постоянные.

Пример 1.12 *Найти вид свободного решения системы*

$$\begin{cases} u_1' = 2u_1 - u_2, \\ u_2' = 3u_1 - 2u_2. \end{cases} \qquad (1.72)$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0\,.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Этим корням соответствуют частные решения

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_{2\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Для определения вида свободной составляющей, соответствующей корню $\lambda = 1$, подставим $\mathbf{u}_{1\text{св}}$ в (1.72)

$$\begin{cases} e^t b_{11} = 2b_{11}e^t - b_{21}e^t, \\ e^t b_{21} = 3b_{11}e^t - 2b_{21}e^t. \end{cases}$$

Отсюда $b_{11} = 2b_{11} - b_{21},\quad b_{21} = 3b_{11} - 2b_{21}$.

Второе уравнение является следствием первого, поэтому один из коэффициентов можно взять произвольно; примем $b_{21}=1$. Тогда $b_{11}=1$. Следовательно, первое частное вектор-решение будет

$$\mathbf{u}_{1\text{св}}=\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\end{bmatrix}=e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

В случае корня $\lambda=-1$ поступим аналогично предыдущему

$$\begin{cases}-e^{-t}b_{12}=2b_{12}e^{-t}-b_{22}e^{-t},\\-e^{-t}b_{22}=3b_{12}e^{-t}-2b_{22}e^{-t},\end{cases}$$

откуда $-b_{12}=2b_{12}-b_{22}$, $-b_{22}=3b_{12}-2b_{22}$.

Второе уравнение снова является следствием первого. Тогда произвольно примем $b_{22}=3$. Следовательно, второе частное вектор-решение будет

$$\mathbf{u}_{2\text{св}}=\begin{bmatrix}u_{12}\\u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}e^{-t}.$$

Таким образом, общее решение системы (1.72) имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_{\text{св}}=\begin{bmatrix}u_{1\text{св}}\\u_{2\text{св}}\end{bmatrix}=c_1\mathbf{u}_{1\text{св}}+c_2\mathbf{u}_{2\text{св}}=c_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

или

$$u_{1\text{св}}=c_1e^{t}+c_2e^{-t},\quad u_{2\text{св}}=c_1e^{t}+3c_2e^{-t}.$$

Б. Корни характеристического уравнения действительные, кратные

Пусть λ является r-кратным корнем характеристического уравнения (1.71). В этом случае также имеем n частных решений

$$\mathbf{u}_{1\text{св}}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}b_{10}\\b_{20}\\\vdots\\b_{n0}\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_{2\text{св}}=e^{\lambda t}t\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{n1}\end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{r\,\text{св}}=e^{\lambda t}t^{r-1}\begin{bmatrix}b_{1,r-1}\\b_{2,r-1}\\\vdots\\b_{n,r-1}\end{bmatrix},$$

где коэффициенты b_{ij} $\left(i=\overline{1,\ n},\ \ j=\overline{0,\ r-1}\right)$, как и прежде, – произвольные постоянные.

Пример 1.13 *Найти общее решение системы*

$$\begin{cases} u_1' &= 2u_1 - u_2, \\ u_2' &= u_1 + 4u_2. \end{cases} \tag{1.73}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Его корни $\lambda_{1,2} = 3$. Вектор-решение запишется как

$$\mathbf{u}_{\text{св}} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} t \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}. \tag{1.74}$$

Коэффициенты b определяются подстановкой (1.74) в (1.73) аналогично пример 1.12

$$\left.\begin{aligned} \left[e^{3t}\left(b_{10}+b_{11}t\right)\right]' &= 2e^{3t}\left(b_{10}+b_{11}t\right) - e^{3t}\left(b_{20}+b_{21}t\right), \\ \left[e^{3t}\left(b_{20}+b_{21}t\right)\right]' &= e^{3t}\left(b_{10}+b_{11}t\right) + 4e^{3t}\left(b_{20}+b_{21}t\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в системе (1.75), получим следующие системы для определения коэффициентов b:

$$\left.\begin{aligned} 3b_{10} + b_{11} &= 2b_{10} - b_{20} \\ 3b_{20} + b_{21} &= b_{10} + 4b_{20} \end{aligned}\right\}, \tag{1.76}$$

$$\left.\begin{aligned} 3b_{11} &= 2b_{11} - b_{21} \\ 3b_{21} &= b_{11} + 4b_{21} \end{aligned}\right\}. \tag{1.77}$$

Поскольку уравнения системы (1.77) линейно зависимы, то коэффициент b_{21} может быть произвольным, например $b_{21} = 1$. Тогда $b_{11} = -1$, а из (1.76) следует, что $b_{10} = 1 - b_{20}$. Из-за линейной зависимости уравнений (1.76) коэффициенты b_{10} и b_{20} также произвольны; пусть $b_{20} = 2$, тогда $b_{10} = -1$. Таким образом, искомое свободное решение будет равно

$$\mathbf{u}_{\text{св}} = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 t e^{3t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

В. Корни характеристического уравнения комплексные

Пусть таким корнем является $\underline{\lambda}_k = \sigma + j\omega$, тогда ему соответствует сопряженный корень $\underline{\lambda}_{k+1} = \underline{\lambda}_k^* = \sigma - j\omega$.

Общее решение системы в этом случае ищется в следующем виде:

$$\mathbf{u}_{\text{св}} = c_1 \operatorname{Re}\left\{\mathbf{u}_{1\text{св}}\right\} + c_2 \operatorname{Im}\left\{\mathbf{u}_{1\text{св}}\right\}, \tag{1.78}$$

где $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ и $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ – вещественная и мнимая части частного решения, соответствующего одному из корней (например, корню $\underline{\lambda}_k$)

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = \begin{bmatrix}\underline{b}_{11}\\ \underline{b}_{21}\\ \vdots\\ \underline{b}_{n1}\end{bmatrix} e^{\lambda_k t} \tag{1.79}$$

где коэффициенты $\underline{b}$ в общем случае будут комплексными.

Пример 1.14 *Найти свободное решение системы*

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + u_2, \\ u_2' = -2u_1 + 3u_2. \end{cases} \tag{1.80}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0;$$

его корни $\underline{\lambda}_{1,2} = 2 \pm j$.

Найдем частное решение для одного из корней, например для

$$\underline{\lambda}_1 = 2 + j.$$

Согласно (1.79)

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = \begin{bmatrix}\underline{b}_{11}\\ \underline{b}_{21}\end{bmatrix} e^{(2+j)t}. \tag{1.81}$$

Подставим (1.81) в (1.80) и сократим на $e^{(2+j)t}$

$$\begin{cases} \underline{b}_{11}(2+j) = \underline{b}_{11} + \underline{b}_{21}, \\ \underline{b}_{21}(2+j) = -2\underline{b}_{11} + 3\underline{b}_{21}. \end{cases} \quad (1.82)$$

Отсюда следует, что

$$\underline{b}_{11} = \frac{1}{2}(1-j)\underline{b}_{21},$$

причем $\underline{b}_{21}$ – произвольное число (из-за линейной зависимости системы (1.82))

Пусть $\underline{b}_{21} = 2$, тогда $\underline{b}_{11} = 1 - j$. Частное решение (1.81) будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u}_{1\text{св}} = \begin{bmatrix} 1-j \\ 2 \end{bmatrix} e^{(2+j)t} = \begin{bmatrix} (1-j)(\cos t + j\sin t) \\ 2(\cos t + j\sin t) \end{bmatrix} e^{2t}.$$

В соответствии с (1.78)

$$\mathbf{u}_{\text{св}} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix} e^{2t}.$$

1.9.2 Определение частного решения неоднородной системы (принужденный режим)

1. Если правая часть $\mathbf{f}$ системы (1.68) состоит из функций

$$f_i(u_0) = Q_{m_i}(t)e^{\sigma_i t}, \quad \left(i = \overline{1,\ q}\right), \quad (1.83)$$

то частное решение системы будет содержать составляющие вида

$$u_{i\,\text{пр}}(t) = \sum_{i=1}^{q} \begin{bmatrix} R_{m_i+r_i,1}(t) \\ \cdots \\ R_{m_i+r_i,n}(t) \end{bmatrix} e^{\sigma_i t} \quad (1.84)$$

где r_i – кратность корня $\lambda = \sigma_i$ (если среди корней нет $\lambda = \sigma_i$, то $r_i = 0$). Здесь n – порядок системы.

2. Если правая часть (1.68) содержит функции

$$f_i(u_0) = e^{\sigma_i t} Q_{m_i}(t)\sin(\omega_i t + \psi_i)$$

или

$$f_i(u_0) = e^{\sigma_i t} Q_{k_i}(t)\cos(\omega_i t + \psi_i), \quad \left(i = \overline{1,\ q}\right),$$

то принужденное решение будет иметь следующие

составляющие:

$$u_{i\,\text{пр}}(t)=\sum_{i=1}^{q}e^{\sigma_i t}\left\{\begin{bmatrix}R_{M_i+r_i,1}(t)\\ \cdots\\ R_{M_i+r_i,n}(t)\end{bmatrix}\cos(\omega_i t+\psi_i)+\begin{bmatrix}S_{M_i+r_i,1}(t)\\ \cdots\\ S_{M_i+r_i,n}(t)\end{bmatrix}\sin(\omega_i t+\psi_i)\right\},$$

где $M_i=\max\{m_i,k_i\}$.

Пример 1.15 *Найти частное решение системы*

$$\begin{cases}u_1'=2u_1-u_2+10t,\\ u_2'=3u_1-2u_2+e^{-10t}.\end{cases}\tag{1.85}$$

Нетрудно видеть, что эта система заимствована из пример 1.12. Корни характеристического уравнения $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$ не совпадают с показателями степеней экспонент правых частей: $f_1(u_0)=10t$, $f_2(u_0)=e^{-10t}$. Согласно (1.83) и (1.84) можно записать

$$u_{\text{пр}}(t)=\begin{bmatrix}a_0+a_1t\\ b_0+b_1t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix}e^{-10t}\tag{1.86}$$

Для определения постоянных подставим (1.86) в (1.85)

$$\begin{cases}a_1-10c_0e^{-10t}=2(a_0+a_1t)+2c_0e^{-10t}-(b_0+b_1t)-d_0e^{-10t}+10t,\\ b_1-10d_0e^{-10t}=3(a_0+a_1t)+3c_0e^{-10t}-2(b_0+b_1t)-2d_0e^{-10t}+e^{-10t}.\end{cases}$$

Приведя одинаковые члены, получим

$$a_1=-20,\quad b_1=-30,\quad a_0=-10,\quad b_0=0.$$

$$c_0=1/11,\quad d_0=12/11.$$

Тогда принужденное решение системы будет иметь следующий вид:

$$u_{\text{пр}}(t)=\begin{bmatrix}-10-20t\\ -30t\end{bmatrix}+\frac{1}{11}\begin{bmatrix}1\\ 12\end{bmatrix}e^{-10t}.$$

ГЛАВА 2

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под *устойчивостью системы* обычно понимают ее свойство возвращаться к исходному состоянию после прекращения внешнего возмущения. Требование устойчивости является одним из основных требований к системе, определяющее ее работоспособность.

Пусть система описывается матричным уравнением (1.68).

Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим некоторое решение системы $u_i(t) = \xi_i(t)$, определенное на интервале $[t_0, \infty)$, причем $\xi_i(t_0) = u_i(t_0)$, где $u_i(t_0)$ – начальные условия.

Решение $\xi_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящие от ε и начального значения t_0, что любое решение $u_i(t) = \varphi_i(t)$, для которого при $t = t_0$ выполняется неравенство $\left|\varphi_i(t_0) - \xi_i(t_0)\right| < \delta$, удовлетворяет неравенству $\left|\varphi_i(t) - \xi_i(t)\right| < \varepsilon$ при $t_0 \le t < \infty$ для всех $i = \overline{1, n}$.

В геометрической интерпретации это означает, что все решения, которые берут начало при $t = t_0$ в δ–окрестности точки с координатами $\left[u_1(t_0), u_2(t_0), ..., u_n(t_0)\right]$, никогда не покинут трубку радиусом ε, осью которой является решение $\boldsymbol{\xi}(t)$. На рис. 2.1

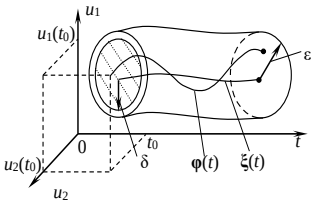


Рис. 2.1 Геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}.$$

Решение $\xi_i(t)$ $(i=\overline{1,\ n})$ называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) решение $\xi_i(t)$ устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$;

2) существует такое число $\eta > 0$, что для любого решения $\varphi_i(t)$, удовлетворяющего при $t = t_0$ неравенству $\left|\varphi_i(t_0) - \xi_i(t_0)\right| < \eta$ будет справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\varphi_i(t) - \xi_i(t)\right| = 0$

Если $\eta = \infty$, то система называется *устойчивой в целом*.

Решение $\xi_i(t)$, не удовлетворяющее этим требованиям, называется *неустойчивым*.

2.2 Устойчивость тривиального решения

Покажем, что исследование устойчивости любого решения системы (1.68) можно свести к исследованию устойчивости тривиального решения $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) \equiv 0$.

Пусть все решения системы (1.68), включая и решение $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее уравнение

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t),$$

устойчивы. Преобразуем систему (1.68) путем введения новых переменных

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{x}(t).$$

Получим

$$\left[\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)\right]' = \mathbf{A}\left[\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)\right] + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t). \tag{2.1}$$

или уравнение в отклонениях $\mathbf{y}(t)$

Тогда система (2.1), порожденная системой (1.68) будет иметь тривиальное решение $\mathbf{y}(t) \equiv 0$, причем оно устойчиво, поскольку по условию устойчивы все решения системы (1.68).

Следовательно, все частные решения системы (1.68) в смысле устойчивости ведут себя так же, как тривиальное

решение соответствующей однородной системы (2.1).

Исследование устойчивости тривиального решения системы (2.1) намного проще исследования устойчивости решения неоднородной системы (1.68), в связи с чем в дальнейшем мы будем рассматривать устойчивость тривиального решения (устойчивость состояний равновесия системы).

Тривиальное решение $y_i(t) \equiv 0 \quad (i = \overline{1, n})$ будет устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящие от ε и t_0, что для любого решения $y_i(t) = \psi_i(t)$, удовлетворяющего при $t = t_0$ неравенству $|\psi_i(t_0)| < \delta$, выполняется неравенство $|\psi_i(t)| < \varepsilon$ при $t_0 \le t < \infty$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Геометрическая интерпретация этого положения дана на рис. 2.2.

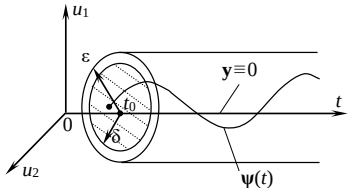


Рис. 2.2 Геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову тривиального решения

Здесь полагалось, что матрица **A** не изменяется с течением времени. Однако выводы относительно свойств тривиального решения системы будут справедливы и тогда, когда параметры системы зависят от времени, т.е. и при переменной матрице $\mathbf{A}(t)$.

2.3 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{2.2}$$

характеристический многочлен системы (1.69). Тогда необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы формулирует следующая теорема:

Для устойчивости линейной однородной системы (линейного однородного дифференциального уравнения) с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (2.2) *имели отрицательную*

действительную часть, причем корни с чисто мнимыми частями должны быть простыми (некратными).

В случае отрицательных действительных частей корней однородная система приобретает асимптотическую устойчивость; если же некоторые корни чисто мнимые или нулевые, то система устойчива, но не обладает асимптотической устойчивостью (решения системы (1.69) не затухают).

Следующая теорема устанавливает связь условий устойчивости неоднородной системы с условиями устойчивости однородной системы:

Линейная неоднородная система (1.68) устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчива (асимптотически устойчива) соответствующая однородная система (1.69).

Эта теорема согласуется с положениями п. 2.2

Пример 2.1 *Определить устойчивость системы*

$$u_1' = -4u_1 + u_2,$$
$$u_2' = 4u_1 - 4u_2.$$

Система устойчива асимптотически, так как характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$$

имеет только отрицательные корни $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -6$.

Пример 2.2 *Определить устойчивость системы*

$$u_1' = 2u_2,$$
$$u_2' = -8u_1.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0\ .$$

Корни чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm j4$. Система устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

Пример 2.3 *Определить устойчивость системы*

$$u_1' = 2u_1 - u_2,$$
$$u_2' = 3u_1 - 2u_2.$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

имеет следующие корни $\lambda = \pm 1$. Так как один из корней положителен, то система неустойчива.

Пример 2.4 *Определить устойчивость системы*

$$u_1'' + 2u_1' + 2u_1 = 0 \,.$$

Система асимптотически устойчива, поскольку действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm j$ отрицательны.

2.4 Положение корней характеристического уравнения устойчивой системы на комплексной плоскости

Как уже отмечалось, действительные части корней характеристического уравнения устойчивой системы либо отрицательны (асимптотическая устойчивость), либо нулевые. Дадим геометрическую интерпретацию этого положения (рис. 2.3).

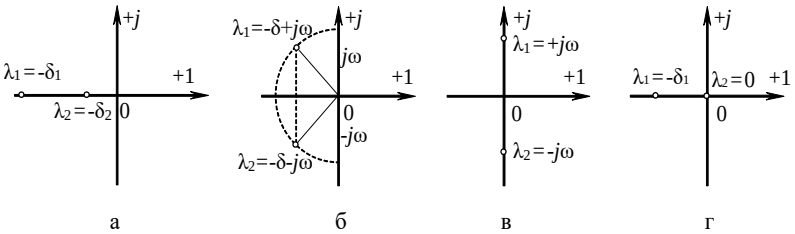


Рис. 2.3 Положение корней устойчивой системы: а и б – асимптотическая устойчивость; в и г – асимптотической устойчивости нет

Из рис. 2.3 видно, что корни характеристического уравнения устойчивой системы находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости. Следовательно, неустойчивая система будет иметь корни в правой полуплоскости.

2.5 Необходимое условие отрицательности действительных частей всех корней характеристического многочлена

Из п. 2.3 следует, что для определения устойчивости системы (1.68) нет необходимости решать саму систему. Достаточно выяснить, будут ли действительные части корней многочлена (2.2) отрицательны.

Известна теорема: *Для того чтобы вещественные части всех корней многочлена с действительными коэффициентами были отрицательны, необходимо, чтобы все коэффициенты этого многочлена имели одинаковые знаки.*

Доказательство. Сначала покажем, что у полинома с действительными коэффициентами каждому корню $\underline{\lambda}_1 = -\sigma + j\omega$ $(\sigma > 0)$ соответствует сопряженный корень $\underline{\lambda}_2 = -\sigma - j\omega$. Поскольку корни $\underline{\lambda}_1$ и $\underline{\lambda}_2$ известны, то полином (2.2) можно представить следующим образом:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \underline{\lambda}_1)(\lambda - \underline{\lambda}_2)P_{n-2}(\lambda) = \left(\lambda^2 + 2\sigma\lambda + \sigma^2 + \omega^2\right)P_{n-2}(\lambda). \qquad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что коэффициенты квадратного трехчлена положительные и действительные.

Теперь докажем теорему. Пусть многочлен (2.2) имеет комплексно-сопряженные корни

$$\underline{\lambda}_m = -\sigma_m \pm j\omega_m \quad (m = \overline{1,\ \nu})$$

кратности r_m и действительные корни

$$\lambda_k = -\sigma_k \quad (k = \overline{1,\ \mu})$$

кратности r_k. Тогда полином можно разложить на линейные сомножители:

$$P_n(\lambda) = a_0 \prod_{m=1}^{\nu} (\lambda + \sigma_m - j\omega_m)^{r_m} (\lambda + \sigma_m + j\omega_m)^{r_m} \prod_{k=1}^{\mu} (\lambda + \sigma_k)^{r_k} =$$

$$= a_0 \prod_{m=1}^{\nu} (\lambda^2 + 2\sigma_m\lambda + \sigma_m^2 + \omega_m^2)^{r_m} \prod_{k=1}^{\mu} (\lambda + \sigma_k)^{r_k}, \qquad a_0 > 0.$$

Отсюда следует, что все коэффициенты a_i $(i = \overline{1,\ n})$ положительны, если $\sigma_m > 0$ и $\sigma_k > 0$.

Для квадратного трехчлена

$$P_2(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad a_0 > 0, \tag{2.4}$$

условие теоремы является и достаточным.

Покажем, что корни многочлена (2.4) будут иметь отрицательные действительные части, если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1, \tag{2.5}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = a_2. \tag{2.6}$$

Так как $a_2 > 0$, то вещественные корни согласно (2.6) должны иметь одинаковые знаки. Поскольку сумма корней в соответствии с (2.5) отрицательна, то оба корня должны быть отрицательными. Если же корни комплексные, то $\underline{\lambda}_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$. Следовательно, $\lambda_1 + \lambda_2 = -2\sigma$, и из (2.5) следует, что $\sigma > 0$, так как $a_1 > 0$.

На основе изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то тривиальное решение системы асимптотически устойчиво.

2. Если $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, то (2.4) преобразится следующим образом:

$$\lambda^2 + a_1\lambda = \lambda(\lambda + a_1) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -a_1$. Тривиальное решение устойчиво, но не асимптотически.

3. Если $a_1 = 0,\ a_2 > 0$, то характеристическое уравнение $\lambda^2 + a_2 = 0$ имеет комплексные корни $\underline{\lambda}_{1,2} = \pm j\omega = \pm j\sqrt{a_2}$. Система устойчива, но не асимптотически.

4. При $a_1 = a_2 = 0$ система неустойчива; в исключительном случае, когда система имеет вид

$$u_1' = 0,$$
$$u_2' = 0,$$

нулевое решение устойчиво.

2.6 Критерии устойчивости

2.6.1 Критерий Гурвица

Теорема. *Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней характеристического многочлена с вещественными коэффициентами*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad (a_0 > 0)$$

является положительность определителей Гурвица.

Определим правила составления определителей Гурвица. Сначала формируется матрица Гурвица (2.7). На ее главной диагонали расставлены коэффициенты многочлена по порядку их нумерации, начиная с a_1. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или четными номерами, причем четность или нечетность номеров элементов столбца определяется номером соответствующего элемента на главной диагонали. Все недостающие коэффициенты, т.е. коэффициенты с индексами меньше нуля и большими n, заменяются нулями

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Определители Гурвица составляются путем последовательного вычленения квадратных матриц, начиная с левого верхнего угла матрицы (2.7):

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \tag{2.8}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \tag{2.9}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.10}$$

и т.д. Последний определитель включает в себя всю матрицу. Поскольку в нем последняя строка состоит сплошь, кроме a_n, из нулевых элементов, то

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{2.11}$$

Учитывая, что для устойчивой системы $\Delta_{n-1} > 0$, получим условие для n-го коэффициента:

$$a_n > 0.$$

Раскрывая определители (2.8) - (2.11) можно получить критерии устойчивости для систем различных порядков. Из-за сложности подсчета определителей для систем высокого порядка критерий Гурвица используется, как правило, только при $n \le 4$.

Рассмотрим применение данного критерия для систем различного порядка.

1. Уравнение первого порядка:

$$a_0\lambda + a_1 = 0, \;\; a_0 > 0.$$

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1 = a_1 > 0$.

2. Уравнение второго порядка:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0.$$

Для устойчивой системы определители Гурвица первого

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \tag{2.12}$$

и второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0 \tag{2.13}$$

должны быть положительны.

Из (2.12) и (2.13) следует, что $a_2 > 0$. Таким образом, критерием устойчивости являются следующие неравенства:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

3. Уравнение третьего порядка:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad a_0 > 0$$

Определители Гурвица: $\Delta_1 = a_1 > 0$,

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \tag{2.14}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0\,.$$

Следовательно, условия положительности коэффициентов

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0$$

уже недостаточно для обеспечения устойчивости системы третьего порядка; требуется выполнить еще одно соотношение между коэффициентами, определяемое условием (2.14).

4. Уравнение четвертого порядка:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad a_0 > 0\,.$$

В этом случае условия устойчивости имеют следующий вид:

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0\,,$$

$$a_1 a_2 - a_2 a_3 > 0\,, \tag{2.15}$$

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0\,. \tag{2.16}$$

Условие (2.15) является лишним, поскольку оно учитывается в неравенстве (2.16).

Пример 2.5

Решения уравнения

$$u_1''' + 2u_1'' + 3u_1' + 10u_1 = f(u_0)$$

неустойчивы, поскольку один из определителей матрицы Гурвица

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

составленной для характеристического уравнения $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$, меньше нуля, а именно:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4 < 0\,.$$

Пример 2.6

Все решения уравнения

$$u_1^{\mathrm{IV}} + u_1''' + 10u_1'' + u_1' + 2u_1 = f(u_0)$$

асимптотически устойчивы, поскольку все коэффициенты положительны и выполняется условие (2.16)

$$1\cdot(1\cdot 10-1\cdot 1)-2\cdot 1^2=7>0\,.$$

2.6.2 Критерий Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова позволяет оценивать устойчивость системы по виду годографа $D(j\omega)$, получаемого из характеристического многочлена системы

$$D(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n \tag{2.17}$$

путем подстановки $\lambda=j\omega$

$$D(j\omega)=a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(j\omega)+a_n\,.$$

Характеристическое уравнение $D(\lambda)=0$ имеет n корней $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, с учетом которых его всегда можно представить в виде

$$D(\lambda)=a_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)\,.$$

После подстановки $\lambda=j\omega$ получаем, что

$$D(j\omega)=a_0(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_2)\ldots(j\omega-\lambda_n)\,. \tag{2.18}$$

Учитывая, что

$$j\omega-\lambda_i=R_ie^{j\varphi_i}\,,$$

где $R_i=|j\omega-\lambda_i|$ – модуль, а $\varphi_i=\arg(j\omega-\lambda_i)$ – аргумент, приводим (2.18) к полярной форме

$$D(j\omega)=a_0\prod_{i=1}^{n}R_ie^{j\varphi_i}=\left(a_0\prod_{i=1}^{n}R_i\right)e^{j\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i}\,. \tag{2.19}$$

Здесь $a_0\prod\limits_{i=1}^{n}R_i=|D(j\omega)|$ – модуль, а $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i=\arg D(j\omega)$ – аргумент вектора $D(j\omega)$.

Корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ характеристического уравнения, а также сомножители $(j\omega-\lambda_i)$ выражения (2.18) могут быть изображены на комплексной плоскости соответствующими векторами. Так,

пара комплексно-сопряженных корней λ_1 и λ_2, находящихся в левой полуплоскости, характеризуется векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.4). Отмечая независимую переменную $j\omega$ точкой *C* на мнимой оси и соединяя ее с точками *A* и *B* прямыми, получим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, характеризующие сомножители $\left(j\omega-\lambda_1\right)$ и $\left(j\omega-\lambda_2\right)$. Аналогичные построения можно выполнить и для всех остальных корней и тем самым охарактеризовать каждый из сомножителей $\left(j\omega-\lambda_i\right)$ соответствующим вектором.

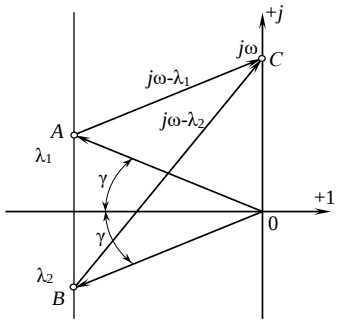


Рис. 2.4

Найдем изменение аргумента многочлена второго порядка $D(j\omega)=a_0\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)$, имеющего комплексно-сопряженные корни λ_1 и λ_2, расположенные в левой полуплоскости. При изменении частоты ω от 0 до ∞ концы векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ двигаются вдоль положительной мнимой оси от 0 до ∞. При этом вектор $\overrightarrow{AC}$ поворачивается против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}+\gamma$, а вектор $\overrightarrow{BC}$ – на угол $\frac{\pi}{2}-\gamma$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ характеризуют соответственно сомножители $\left(j\omega-\lambda_1\right)$ и $\left(j\omega-\lambda_2\right)$ многочлена $D(j\omega)$, то их углы поворота соответствуют изменениям аргументов этих сомножителей: $\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\gamma$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}-\gamma$. Поэтому результирующее изменение аргумента многочлена $D(j\omega)$ согласно (2.19) будет равно

$$\arg_{0\le\omega\le\infty} D(j\omega)=\varphi_1+\varphi_2=\pi .$$

Таким образом, пара комплексно-сопряженных корней дает изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ на π.

Предположим теперь, что многочлен $D(j\omega)$ имеет комплексно-сопряженные корни в правой полуплоскости (рис. 2.5). Как видно из рисунка, при изменении частоты ω от 0 до ∞ векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ поворачиваются по ходу часовой стрелки (в отрицательную сторону) на углы $\varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$ и $\varphi_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ соответственно. Тогда результирующее изменение аргумента $D(j\omega)$ будет равно

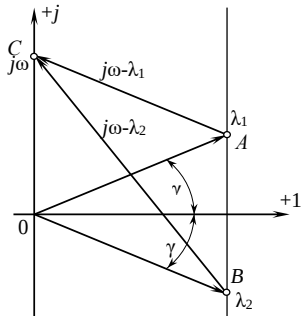


Рис. 2.5

$$\arg D(j\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 = -\pi .$$

Также несложно показать, что действительный корень, расположенный в левой полуплоскости (на отрицательной действительной оси) дает приращение аргумента $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ на $\frac{\pi}{2}$, а действительный положительный корень на $-\frac{\pi}{2}$.

В связи с этим m корней, расположенных в правой полуплоскости, дают изменение аргумента $D(j\omega)$, равное $-m\frac{\pi}{2}$, а остальные $n-m$ корней, расположенные в левой полуплоскости, дают изменение аргумента $D(j\omega)$, равное $(n-m)\frac{\pi}{2}$. Результирующее изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = (n-m)\frac{\pi}{2} - m\frac{\pi}{2} = (n-2m)\frac{\pi}{2} . \qquad (2.20)$$

Выражение (2.20) определяет изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ неустойчивой системы. Положив $m=0$, получаем

изменение аргумента $D(j\omega)$ в случае, когда все корни системы находятся в левой полуплоскости, т.е. для устойчивой системы

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg} D(j\omega) = n\frac{\pi}{2}. \qquad (2.21)$$

Формула (2.21) определяет необходимые и достаточные условия устойчивости системы.

Годограф вектора $D(j\omega)$ называется характеристической кривой, или *кривой Михайлова*. На основании (2.21) можно дать следующую формулировку критерия устойчивости Михайлова: *для устойчивости системы n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор* $D(j\omega)$, *описывающий своим концом кривую Михайлова при изменении частоты* ω *от* 0 *до* ∞, *начав свое движение с положительной действительной оси и вращаясь против движения часовой стрелки, последовательно проходил n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль*.

Критерий был сформулирован А.В. Михайловым в 1936 г.

Если построить зависимость $D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ на комплексной плоскости, то получим кривую Михайлова. Приведем свойства этой кривой:

1) кривая Михайлова всегда берет начало в точке $D(j\omega = 0) = X(\omega = 0) = a_n$, расположенной на действительной оси;

2) для устойчивых систем кривая Михайлова имеет плавную спиралевидную форму и уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен порядку характеристического многочлена n (рис. 2.6, *а*), т.е. кривая Михайлова последовательно проходит n квадрантов, в связи с чем сначала должна обратиться в нуль мнимая часть $Y(\omega_1) = 0$, затем вещественная $X(\omega_2) = 0$, затем снова $Y(\omega_3) = 0$ и так далее, причем $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ \ldots < \omega_n$;

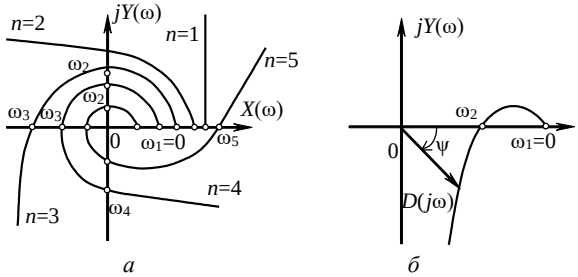


Рис. 2.6 Кривые Михайлова: а – устойчивая система; б – неустойчивая система

3) по кривой Михайлова для неустойчивой системы (рис. 2.6, *б*) можно определить число корней N, содержащих положительные действительные части. Для этого нужно узнать, на какой угол $\psi(\infty)$ относительно оси $X(\omega)$ поворачивается вектор $D(j\omega)$, конец которого движется по кривой при $\omega \to \infty$. Тогда число

$$N = \frac{n\frac{\pi}{2} - \psi(\infty)}{\pi} = \frac{n}{2} - \frac{\psi(\infty)}{\pi}; \qquad (2.22)$$

4) если характеристический многочлен $D(\lambda)$, определенный в виде (2.17), имеет комплексно-сопряженные корни на мнимой оси (например $\underline{\lambda}_{1,2} = \pm j\omega_0$), то кривая Михайлова будет проходить через начало координат (рис. 2.7). Система не будет иметь асимптотической устойчивости.

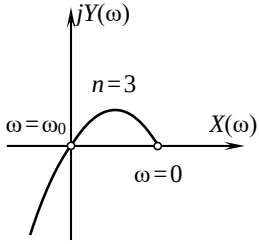


Рис. 2.7

Пример 2.7 *Для системы, кривая Михайлова которой представлена на рис. 2.6, б, определить число корней, содержащих положительные действительные части.*

Из рис. 2.6, *б* следует, что угол $\psi(\infty) = -\pi/2$. Тогда в соответствии с (2.22) при $n = 3$

$$N = \frac{3}{2} - \frac{(-\pi/2)}{\pi} = 2\,.$$

Пример 2.8 *Используя критерий Михайлова, определить коэффициент К системы, характеризующейся следующим полиномом:*

$$D(\lambda) = 6\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda + K\,. \qquad (2.23)$$

Подставляя в (2.23) корень $\lambda = j\omega$, получим характеристический комплексный многочлен

$$D(j\omega) = -6j\omega^3 - 5\omega^2 + j\omega + K\,.$$

Вещественная часть $X(\omega) = K - 5\omega^2$, мнимая $Y(\omega) = \omega - 6\omega^3$. По критерию Михайлова корни уравнений

$$X(\omega) = K - 5\omega^2 = 0 \qquad (2.24)$$

и

$$Y(\omega) = \omega - 6\omega^3 = 0 \qquad (2.25)$$

должны перемежаться. Поскольку у многочлена (2.23) могут быть только три корня, то два из них (ω_1 и ω_3) приходятся на уравнение (2.25), а корень ω_2 на (2.24), причем согласно свойству 2) кривой Михайлова должно быть выполнено условие

$$0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3\,. \qquad (2.26)$$

Корень ω_2 определяем из (2.24)

$$\omega_2 = \sqrt{K/5}, \qquad (2.27)$$

а корень ω_3 – из (2.25)

$$\omega_3 = \sqrt{1/6}\,. \qquad (2.28)$$

Подставляя (2.27) и (2.28) в (2.26), получим условие для выбора K

$$0 < \sqrt{K/5} < \sqrt{1/6}\,,$$

откуда $0 < K < 5/6 = 0{,}83$.

Кривая Михайлова, построенная при $K = 1/2$, показана на рис. 2.8. Из нее видно, что система устойчива.

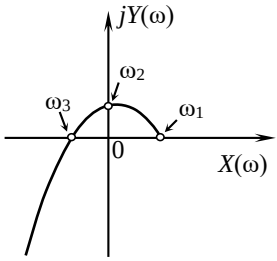


Рис. 2.8

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

3.1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Число

$$\underline{z} = \sigma + j\omega$$

(σ и ω – любые действительные числа, а j – мнимая единица $j^2 = -1$) называется *комплексным*. Действительные числа σ и ω называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $\underline{z}$ и обозначаются как

$$\sigma = \mathrm{Re}(\underline{z}), \quad \omega = \mathrm{Im}(\underline{z}).$$

Комплексное число $\underline{z}$ допускает изображение в виде вектора на комплексной плоскости (рис. 3.1), состоящей из оси действительных чисел (ось σ) и перпендикулярной ей оси мнимых чисел (ось $j\omega$). Координаты конца вектора равны проекциям вектора на действительную и мнимую оси: σ и ω. Иногда удобно комплексное число определять с помощью полярных координат: длины z и угла φ: $\underline{z} = ze^{j\varphi} = z\angle\varphi$. Число z называется *модулем комплексного числа* $\underline{z}$ и равно

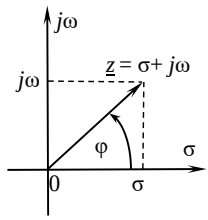


Рис. 3.1 Комплексное число на комплексной плоскости

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2},$$

а число φ называется *аргументом*

$$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{z}) = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{\sigma} + 2k\pi, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ ...). \tag{3.1}$$

Модуль комплексного числа $\underline{z}$ есть положительное число. Модуль отличен от нуля, если $\underline{z} \neq 0$. Согласно (3.1) аргумент комплексного числа $\underline{z} \neq 0$ функция неоднозначная, его главное значение $\arg(\underline{z})$ заключено в пределах $0 \leq \arg(\underline{z}) = \operatorname{arctg}(\omega/\sigma) < 2\pi$, причем при $\underline{z} = 0$ модуль $|\underline{z}| = 0$, а значение $\arg(\underline{z})$ неопределенно.

Комплексное число можно записать в *тригонометрической форме*. Поскольку $\sigma = z\cos\varphi$, $\omega = z\sin\varphi$, то

$$\underline{z} = z(\cos\varphi + j\sin\varphi).$$

Тот же результат дает преобразование комплекса $\underline{z} = e^{j\varphi}$ по *теореме Эйлера*

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

3.1.2 Свойства комплексных чисел

1. *Равенство*. Два комплексных числа $\underline{z}_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ и $\underline{z}_2 = \sigma_2 + j\omega_2$ равны, если равны порознь их действительные и мнимые части, т.е. равенство $\sigma_1 + j\omega_1 = \ = \sigma_2 + j\omega_2$ равносильно равенствам $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\omega_1 = \omega_2$.

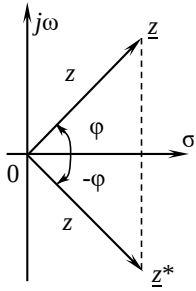


Рис. 3.2 Комплексно-сопряженные числа на комплексной плоскости

2. *Сопряжение*. Комплексное число $\underline{z}^*$ называется сопряженным к числу $\underline{z} = \sigma + j\omega$, если $\underline{z}^* = \sigma - j\omega$, т.е. $\underline{z}^*$ отличается от $\underline{z}$ только знаком мнимой части (знаком аргумента φ) (рис. 3.2).

3. Сложение и вычитание. При сложении (вычитании) комплексных чисел $\underline{z}_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ и $\underline{z}_2 = \sigma_2 + j\omega_2$ складываются (вычитаются) отдельно *их действительные и мнимые части:*

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (\sigma_1 \pm \sigma_2) + j(\omega_1 \pm \omega_2). \qquad (3.2)$$

Геометрическая интерпретация правила (3.2) приведена на рис. 3.3.

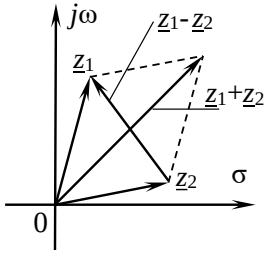


Рис. 3.3 Сложение и вычитание комплексных чисел на комплексной плоскости

4. *Умножение.* Оно осуществляется так же, как и умножение многочленов:

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = (\sigma_1 + j\omega_1)(\sigma_2 + j\omega_2) =$$
$$= (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1).$$

Удобно умножать комплексные числа, заданные в полярных координатах:

$$\underline{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1} \quad \text{и} \quad \underline{z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2}.$$

В этом случае

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = z_1 z_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что произведение сопряженных комплексов $\underline{z} = ze^{j\varphi}$ и $\underline{z}^* = ze^{-j\varphi}$ равно квадрату модулей этих чисел:

$$\underline{z}\,\underline{z}^* = ze^{j\varphi}ze^{-j\varphi} = z^2 e^{j(\varphi-\varphi)} = z^2.$$

5. *Деление*. Оно определяется таким образом:

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\sigma_1 + j\omega_1}{\sigma_2 + j\omega_2} = \frac{(\sigma_1 + j\omega_1)(\sigma_2 - j\omega_2)}{(\sigma_2 + j\omega_2)(\sigma_2 - j\omega_2)} =$$
$$= \frac{\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2}{\sigma_2^2 + \omega_2^2} + j\,\frac{\sigma_2\omega_1 - \sigma_1\omega_2}{\sigma_2^2 + \omega_2^2}.$$

В полярных координатах это правило записывается проще:

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1 e^{j\varphi_1}}{z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

6. *Возведение в степень и извлечение корня*. Из (3.3) следует, что

$$\underline{z}\,\underline{z} = ze^{j\varphi}ze^{j\varphi} = z^2 e^{j2\varphi}.$$

Аналогично для n умножений

$$\underline{z}^n = \underline{z}\,\underline{z}\,\ldots\,\underline{z} = z^n e^{jn\varphi} = z^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi). \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.4) устанавливает правило возведения комплексного числа в степень n.

Рассмотрим операцию извлечения корня из комплексного числа. Пусть $\underline{w} = we^{j\psi} = \sqrt[n]{\underline{z}}$. Применим правило (3.4) к числу $\underline{w}$:

$$\underline{w}^n = w^n e^{jn\psi} = \underline{z} = ze^{j\varphi}.$$

Два комплексных числа, записанных в полярных координатах, равны друг другу тогда, когда равны их модули

$$w^n = z,$$

а аргументы отличаются на число, кратное 2π:

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, ...).$$

Отсюда следует, что имеется n корней с модулем $w_k = \sqrt[n]{z}$ и аргументом $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, где $k = \overline{0, n\text{-}1}$. Тогда

$$\underline{w}_k = \sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{3.5}$$

Дадим геометрическую интерпретацию результата. Как видно из (3.5), все n комплексных корней имеют одинаковый модуль, а их аргументы отличаются на $2\pi/n$. Следовательно, на комплексной плоскости все они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{z}$, причем вектор $\underline{w}_0$ расположен под углом φ/n к действительной оси (рис. 3.4).

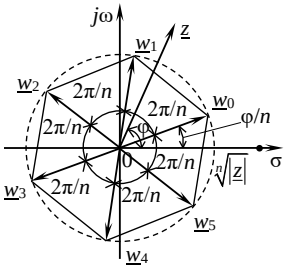


Рис. 3.4

Пример 3.1 *Вычислить* $\sqrt[3]{j}$.

Модуль $|j| = 1$, а $\varphi = \arg(j) = \pi/2$, поэтому

$$\sqrt[3]{j} = 1\left(\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + j\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right), (k = 0, 1, 2).$$

Или

$$\underline{w}_0 = \cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2},$$

$$\underline{w}_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2},$$

$$\underline{w}_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = -j.$$

Расположение корней показано на рис. 3.5

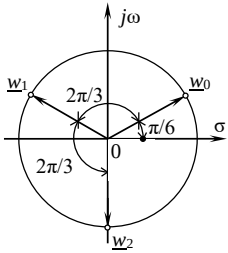


Рис. 3.5

3.2 Последовательность комплексных чисел. Множества

1. *Последовательностью комплексных чисел* называется неограниченное пронумерованное множество комплексных чисел $\underline{z}_1,\ \underline{z}_2,\ \underline{z}_3, \ldots,\ \underline{z}_n, \ldots$ и обозначается следующим образом: $\{\underline{z}_n\}$.

Множество точек $\underline{z}$ комплексной плоскости, удовлетворяющее неравенству $|\underline{z} - \underline{z}_0| < \varepsilon$, называется ε*-окрестностью точки* $\underline{z}_0$.

2. Комплексное число $\underline{z}_0$ называется *пределом числовой последовательности* $\{\underline{z}_n\}$, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|\underline{z}_n - \underline{z}_0| < \varepsilon$.

Иначе говоря, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{z}_n = \underline{z}_0$ означает, что как бы мала ни была ε-окрестность точки $\underline{z}_0$, все точки последовательности $\{\underline{z}_n\}$, начиная с номера $n = N$, попадут внутрь этой ε-окрестности.

Последовательность $\{\underline{z}_n\}$, имеющая предел $\underline{z}_0$, называется *сходящейся к числу* $\underline{z}_0$.

Поскольку комплексное число $\underline{z}_n = \sigma_n + j\omega_n$ характеризуется парой действительных чисел σ_n и ω_n, то

последовательности комплексных чисел $\{\underline{z}_n\}$ соответствуют две последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\omega_n\}$ действительных чисел. Таким образом, для сходимости последовательности $\{\underline{z}_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\omega_n\}$.

3. Если последовательность возрастающая, то удобно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{z}_n = \infty$, и говорить, что предел последовательности $\{\underline{z}_n\}$ бесконечен, т.е. последовательность $\{\underline{z}_n\}$ сходится к числу $\underline{z}_0 = \infty$, которое называется *бесконечно удаленной точкой*. Комплексная плоскость с присоединенной бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью*. Для бесконечно удаленной точки понятия действительной и мнимой частей, а также аргумента не определены.

4. Точка $\underline{z}$ называется *внутренней точкой множества E* точек комплексной плоскости, если существует ε-окрестность точки $\underline{z}$, целиком принадлежащая множеству *E*.

Множество *E* называется *областью*, если:

а) каждая точка множества *E* является внутренней точкой;

б) любые две точки, принадлежащие множеству *E*, можно соединить ломаной, состоящей полностью из точек множества *E*.

Например, множество $|\underline{z}| < 1$ является областью (рис. 3.6, а), а множество точек $|z| < 1$, $|z - 2| < 1$ не является таковой (рис. 3.6, *б*), поскольку не удовлетворяет условию б).

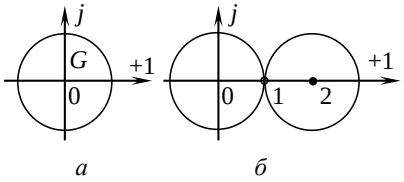


Рис. 3.6

Граничной точкой области G называется точка, которая сама не принадлежит области *G*, но любая ε-окрестность которой содержит точки *G*. Например, точка $\underline{z} = 1$ является граничной точкой области $|\underline{z}| < 1$ (рис. 3.7).

Совокупность граничных точек назовем *границей* (граничной линией) области и обозначим через l.

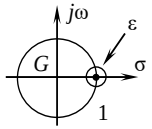


Рис. 3.7

Область G называется *ограниченной*, если она лежит внутри некоторого круга конечного радиуса.

Область может быть определена либо на всей плоскости, либо на всей плоскости за исключением некоторых точек (рис. 3.8, а), либо на части плоскости, ограниченной одной (односвязная область, рис. 3.8, б) или несколькими (многосвязная область, рис. 3.8, *в*) граничными линиями.

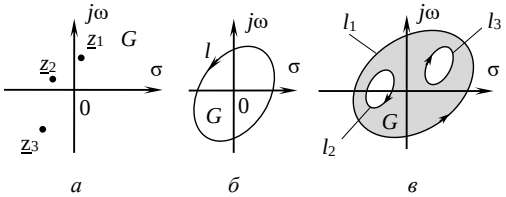


Рис. 3.8

Направление обхода, при котором область G остается слева (рис. 3.8, *б* и *в*), называется *положительным*.

3.3 **ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Говорят, что на множестве E комплексной плоскости задана функция комплексного переменного (ФКП) $\underline{z}$, если задано правило, по которому каждому значению $\underline{z}$ множества E ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел $\underline{w}$ из множества G значений функции $f(\underline{z})$. Множество G (функция $f(\underline{z})$) называется *многозначным*, если каждому значению $\underline{z}$ соответствует несколько значений $\underline{w}$.

Поскольку комплексное число $\underline{w} = u \pm jv$ характеризуется парой действительных функций, то задание функции $f(\underline{z})$

комплексного переменного $\underline{z} = \sigma \pm j\omega$ равносильно заданию двух функций u и v двух действительных переменных σ и ω, т. е.

$$w(\underline{z}) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega). \tag{3.6}$$

Действительные функции $u(\sigma, \omega)$ и $v(\sigma, \omega)$ называются действительной и мнимой частями функции $\underline{w} = f(\underline{z})$.

Геометрически задание функции $\underline{w} = f(\underline{z})$ означает, что установлен закон, по которому каждой точке области E комплексной плоскости $\underline{z}$ ставится в соответствие одна или несколько точек области G комплексной плоскости $\underline{w}$. Таким образом, функция $\underline{w} = f(\underline{z})$ *отображает* область E плоскости $\underline{z}$ на область G плоскости $\underline{w}$ (рис. 3.9).

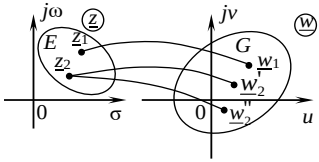


Рис. 3.9

Возможно и обратное отображение: каждой точке $\underline{w} \in G$ ставится в соответствие одна или несколько точек $\underline{z}$ области E. Это означает, что в области G задана функция комплексного переменного $\underline{w}$: $\underline{z} = \varphi(\underline{w})$. Она называется *обратной* по отношению к $\underline{w} = f(\underline{z})$.

3.4 Предел ФКП

Пусть функция $f(\underline{z})$ определена и однозначна в некоторой области E плоскости $\underline{z}$, кроме, быть может, точки $\underline{z}_0$ (функция не определена, если содержит выражение вида ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$, $0/0$).

Говорят, что *функция* $f(\underline{z})$ *имеет предел* $\underline{w}_0$ при $\underline{z}$, стремящемся к $\underline{z}_0$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки $\underline{w}_0$ можно найти δ-окрестность точки $\underline{z}_0$, что для

всех точек $\underline{z}$ этой δ-окрестности (кроме, быть может, самой точки $\underline{z}_0$) соответствующие значения функции $f(\underline{z})$ будут изображаться точками ε-окрестности точки $\underline{w}_0$, т.е. $\lim\limits_{\underline{z}\to\underline{z}_0} f(\underline{z}) = \underline{w}_0$.

Согласно (3.6) из существования предела функции $f(\underline{z})$ в точке $\underline{z}_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ следует существование пределов

$$\lim_{\substack{\sigma\to\sigma_0\\ \omega\to\omega_0}} u(\sigma,\omega) = u_0, \qquad \lim_{\substack{\sigma\to\sigma_0\\ \omega\to\omega_0}} v(\sigma,\omega) = v_0,$$

причем $\underline{w}_0 = u_0 + jv_0$.

3.5 Непрерывность функций

Если функция определена в точке $\underline{z}_0$ и в некоторой ее окрестности и предел $\lim\limits_{\underline{z}\to\underline{z}_0} f(\underline{z})$ не только существует, но и равен значению функции $f(\underline{z})$ в точке $\underline{z}_0$, т.е.

$$\lim_{\underline{z}\to\underline{z}_0} f(\underline{z}) = f(\underline{z}_0),$$

то функция $f(\underline{z})$ называется *непрерывной в точке* $\underline{z}_0$.

Функция *непрерывна в области G*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Для непрерывных ФКП справедливы все свойства непрерывных функций действительного переменного:

1. Сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель не обращается в нуль) двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Непрерывная функция $\varphi(\underline{w})$ от непрерывной функции $\underline{w} = f(\underline{z})$ является непрерывной.

3.6 Производная ФКП

Пусть функция $\underline{w} = f(\underline{z})$ определена и непрерывна в некоторой области *E*. Рассмотрим две точки $\underline{z}$ и $\underline{z} + \Delta\underline{z}$, принадлежащие области *E*, и составим отношение

$$\frac{f(\underline{z} + \Delta\underline{z}) - f(\underline{z})}{\Delta\underline{z}} = \frac{\Delta\underline{w}}{\Delta\underline{z}}.$$

Если существует предел отношения $\Delta\underline{w} / \Delta\underline{z}$ при стремлении $\Delta\underline{z}$ к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной функции* $f(\underline{z})$ в точке $\underline{z}$ и обозначается следующим образом:

$$\underline{w}' = f'(\underline{z}) = \lim_{\Delta\underline{z} \to 0} \frac{\Delta\underline{w}}{\Delta\underline{z}}.$$

Отметим, что требование существования предела отношения $\Delta\underline{w} / \Delta\underline{z}$ и его независимости от закона стремления $\Delta\underline{z}$ к нулю накладывает на функцию $f(\underline{z})$ более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = f(x)$ действительного переменного x.

Так, для того чтобы показать, что функция $f(x)$ имеет предел, достаточно доказать, что при приближении к точке x слева и справа существуют пределы, и эти пределы равны. В случае функции комплексного переменного $\underline{w} = f(\underline{z})$ требование существования производной означает существование предела отношения $\Delta\underline{w} / \Delta\underline{z}$ при приближении к точке $\underline{z}$ по любому пути.

Поскольку определение производной ФКП совпадает с определением производной функции действительного переменного, то все правила дифференцирования функций действительного переменного применимы к ФКП.

3.7 Аналитичность функции комплексного переменного

Если функция дифференцируема не только в данной точке z_0, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической* в данной точке.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется *аналитической*, или *голоморфной*, в этой области.

Точки плоскости $\underline{z}$, в которых однозначная функция $f(\underline{z})$ является аналитической, называют *правильными,* а точки, в которых функция $f(\underline{z})$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(\underline{z})$ не определена) – *особыми.*

Дадим необходимые и достаточные условия аналитичности функции $f(\underline{z})$. Для того чтобы функция $f(\underline{z}) = u(\sigma,\omega) + jv(\sigma,\omega)$, определенная в некоторой окрестности точки $\underline{z}_0$, имела производную в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функции $u(\sigma,\omega)$ и $v(\sigma,\omega)$ были дифференцируемы в точке $\underline{z}_0$ по σ и ω;

2) в точке $\underline{z}_0$ выполнялись условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}. \tag{3.7}$$

Используя условия Коши – Римана (3.7), можно показать, что

$$f'(\underline{z}) = \frac{\partial u}{\partial \sigma} + j\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial u}{\partial \sigma} - j\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial v}{\partial \omega} - j\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial v}{\partial \omega} + j\frac{\partial v}{\partial \sigma}.$$

Пример 3.2 *Определить аналитичность функции*

$$f(\underline{z}) = \underline{z}^2 = (\sigma + j\omega)^2 = \sigma^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega.$$

Действительная и мнимые части функции

$$u(\sigma,\omega) = \sigma^2 - \omega^2,\ v(\sigma,\omega) = 2\sigma\omega.$$

Продифференцируем u и v по σ и ω

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 2\sigma,\ \frac{\partial v}{\partial \omega} = 2\sigma,\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -2\omega,\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} = 2\omega.$$

Поскольку выполняются условия Коши – Римана для всех точек комплексной плоскости, то функция $f(\underline{z}) = \underline{z}^2$ аналитична всюду на комплексной плоскости.

Пример 3.3 *Определить аналитичность функции* $f(\underline{z}) = \underline{z}^* = \sigma - j\omega$.

Функция не аналитична, поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial \omega} = -1,$$

и первое из условий (3.7) не выполняется.

3.8 Интеграл функции комплексного переменного

Пусть функция комплексного переменного $f(\underline{z})$ определена и непрерывна на дуге C (рис. 3.10). Разобьем дугу C на "элементарные" дуги и пронумеруем точки деления в направлении от начальной точки $\underline{z}_0$ к конечной $\underline{z}_n$. Введем обозначения

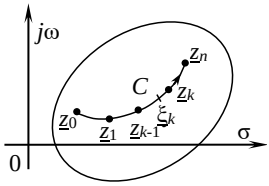


Рис. 3.10

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_0 = \Delta\underline{z}_1, \ \underline{z}_2 - \underline{z}_1 = \Delta\underline{z}_2, \ \ldots,$$

$$\underline{z}_k - \underline{z}_{k-1} = \Delta\underline{z}_k, \ \ldots, \ \underline{z}_n - \underline{z}_{n-1} = \Delta\underline{z}_n .$$

Число $\Delta\underline{z}_k$ изображается вектором, идущим от точки $\underline{z}_{k-1}$ к $\underline{z}_k$. Выберем по одной точке $\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2, \ldots, \underline{\xi}_k, \ldots, \underline{\xi}_n$ на каждой элементарной дуге. Составим сумму

$$f(\underline{\xi}_1)\Delta\underline{z}_1 + f(\underline{\xi}_2)\Delta\underline{z}_2 + \ldots + f(\underline{\xi}_k)\Delta\underline{z}_k + \ldots + f(\underline{\xi}_n)\Delta\underline{z}_n = \sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)\Delta\underline{z}_k .$$

Предел этой суммы, вычисленной при условии, что $n \to \infty$, а длина наибольшей из элементарных дуг $\Delta\underline{z}_k$ стремится к нулю, называется *интегралом от функции* $f(\underline{z})$ по дуге C и обозначается следующим образом:

$$\int_C f(\underline{z})\,d\underline{z} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta\underline{z}_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)\Delta\underline{z}_k . \qquad (3.8)$$

Вычисление интеграла (3.8) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций. Пусть

$$\underline{z} = \sigma + j\omega, \quad f\left(\underline{z}\right) = u(\sigma,\omega) + jv(\sigma,\omega).$$

Тогда

$$\int_C f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} = \int_C \left[u(\sigma,\omega) + jv(\sigma,\omega)\right] d(\sigma + j\omega) =$$

$$= \int_C \left[u(\sigma,\omega) d\sigma - v(\sigma,\omega) d\omega\right] + j\int_C \left[u(\sigma,\omega) d\omega + v(\sigma,\omega) d\sigma\right].$$

Свойства интеграла ФКП:

1. Для любых постоянных $\underline{a}$ и $\underline{b}$ справедливо

$$\int_C \left[\underline{a} f_1\left(\underline{z}\right) + \underline{b} f_2\left(\underline{z}\right)\right] d\underline{z} = \underline{a}\int_C f_1\left(\underline{z}\right) d\underline{z} + \underline{b}\int_C f_2\left(\underline{z}\right) d\underline{z}.$$

2. При изменении направления интегрирования знак интеграла меняется на обратный:

$$\int_C f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} = -\int_{\overline{C}} f\left(\underline{z}\right) d\underline{z}. \tag{3.9}$$

Здесь дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой C, но имеет противоположное направление. Свойство (3.9) следует из уравнения (3.8), в правой части которого при замене направления интегрирования все $\Delta\underline{z}_k$ меняют свой знак.

3. Если дуга состоит из дуг $C_1, C_2, \cdots, C_n$, то

$$\int_C f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} = \int_{C_1} f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} + \int_{C_2} f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} + \ldots + \int_{C_n} f\left(\underline{z}\right) d\underline{z}.$$

3.9 Интегральная теорема Коши

Теорема коши. Если функция $f\left(\underline{z}\right)$ аналитична в области G, то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, т.е.

$$\int_C f\left(\underline{z}\right) d\underline{z} = 0.$$

Следствие. Интеграл по всякой дуге, находящейся в области аналитичности функции $f\left(\underline{z}\right)$, зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги и, следовательно,

одинаков для всех дуг, имеющих одинаковые начальную и конечную точки. Другими словами, интеграл от $f(\underline{z})$ не зависит от пути интегрирования.

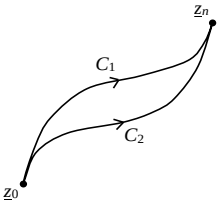


Рис. 3.11

Действительно, если дуги C_1 и C_2 имеют общую начальную точку $\underline{z}_0$ и конечную точку $\underline{z}_n$ (рис. 3.11), то интеграл

$$\int\limits_{C_1+C_2} f(\underline{z})d\underline{z} = \int\limits_{C_1} f(\underline{z})d\underline{z} - \int\limits_{C_2} f(\underline{z})d\underline{z} = 0 .$$

Откуда следует, что

$$\int\limits_{C_1} f(\underline{z})d\underline{z} = \int\limits_{C_2} f(\underline{z})d\underline{z}$$

3.10 **Формула Коши**

Предположим, что функция $f(\underline{\zeta})$ является аналитической в односвязной области G плоскости $\underline{\zeta}$, а также на контуре Г, ограничивающем эту область. Пусть $\underline{z}$ – любая точка внутри области G (рис. 3.12).

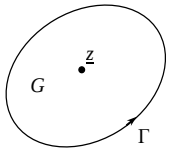


Рис. 3.12

Тогда для любой точки $\underline{z}$ области G справедливо равенство

$$f(\underline{z}) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\underline{\zeta})}{\underline{\zeta}-\underline{z}}\, d\underline{\zeta}, \tag{3.10}$$

называемое *формулой Коши*. Величина, стоящая в правой части формулы (3.10), называется *интегралом Коши*. Для вычисления его необходимо знать значения функции $f(\underline{\zeta})$ только на контуре Г. Следовательно, формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области G, если известны значения этой функции на контуре Г.

3.11 Разложение аналитических функций в ряд

Ряды вида

$$\underline{c}_0 + \underline{c}_1\left(\underline{z} - \underline{z}_0\right) + \cdots + \underline{c}_n\left(\underline{z} - \underline{z}_0\right)^n + \ldots \tag{3.11}$$

называются *степенными.*

3.11.1 Ряд Тейлора

Пусть функция $f\left(\underline{z}\right)$ однозначная и аналитическая внутри ограниченной области G с центром в точке $\underline{z}_0$ (рис. 3.13).

Тогда во всякой точке $\underline{z}$, находящейся внутри круга G, функция $f\left(\underline{z}\right)$ может быть представлена с помощью степенного ряда (3.11), коэффициенты которого вычисляются по формулам

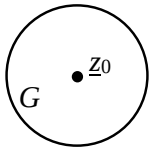


Рис. 3.13

$$\underline{c}_0 = f\left(\underline{z}_0\right),\ \ \underline{c}_n = f^{(n)}\left(\underline{z}_0\right)/n! \quad \left(n = \overline{1, \infty}\right).$$

В развернутой форме ряд имеет следующий вид:

$$f\left(\underline{z}\right) = f\left(\underline{z}_0\right) + \frac{f'\left(\underline{z}_0\right)}{1!}\left(\underline{z} - \underline{z}_0\right) + \frac{f''\left(\underline{z}_0\right)}{2!}\left(\underline{z} - \underline{z}_0\right)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}\left(\underline{z}_0\right)}{n!}\left(\underline{z} - \underline{z}_0\right)^n + \cdots \tag{3.12}$$

Пример 3.4 *Разложить в ряд* $e^{\underline{z}}$ *в окрестности точки* $\underline{z}_0 = 0$.

Поскольку

$$\left(e^{\underline{z}}\right)' = e^{\underline{z}},\quad \left(e^{\underline{z}}\right)'' = e^{\underline{z}},\ \ldots,\quad \left(e^{\underline{z}}\right)^{(n)} = e^{\underline{z}},$$

то в соответствии с (3.12)

$$e^{\underline{z}} = 1 + \frac{\underline{z}}{1!} + \frac{\underline{z}^2}{2!} + \cdots + \frac{\underline{z}^n}{n!} + \cdots$$

3.11.2 Ряды Лорана

Пусть функция $f(\underline{z})$ является однозначной аналитической внутри кольца между концентрическими окружностями C_1 и C_2 с центром в точке $\underline{z} = \underline{z}_0$ (рис. 3.14).

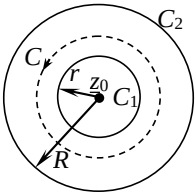


Рис. 3.14

Тогда функция $f(\underline{z})$ может быть представлена в этом кольце с помощью ряда Лорана

$$f(\underline{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k (\underline{z} - \underline{z}_0)^k ,$$

где

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\underline{\zeta}) d\underline{\zeta}}{(\underline{\zeta} - \underline{z}_0)^{k+1}}, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.13}$$

Здесь C – произвольно выбранный замкнутый путь интегрирования внутри кольца, по которому обходят точку $\underline{z}_0$ против часовой стрелки.

Часто разложение функции $f(\underline{z})$ можно получить, не прибегая к формуле (3.13) для вычисления коэффициентов $\underline{c}_k$. В этих случаях используются свойства бесконечной геометрической прогрессии

$$\underline{c}_n = \underline{c}_{n-1} \underline{q} = \underline{c}_1 \underline{q}^{n-1}, \ n = \overline{1, \infty} .$$

Как известно, при $|\underline{q}| < 1$ сумма этой прогрессии

$$s = \underline{c}_1 \left(1 + \underline{q} + \underline{q}^2 + \cdots + \underline{q}^n + \ldots\right) = \frac{\underline{c}_1}{1 - \underline{q}} .$$

Пример 3.5 *Разложить функцию*

$$f(\underline{z}) = \frac{1}{(\underline{z} - 1)(\underline{z} - 2)} \tag{3.14}$$

в кольце $1 < |\underline{z}| < 2$ *с центром в точке* $\underline{z}_0 = 0$.

Функцию (3.14) можно представить в виде суммы дробей

$$f(\underline{z}) = \frac{1}{\underline{z}-2} - \frac{1}{\underline{z}-1}.$$

Разложим каждую дробь в отдельности в ряд. Преобразуем дробь $1/(\underline{z}-2)$ в выражение суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|\underline{z}/2| < 1$

$$\frac{1}{\underline{z}-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{\underline{z}}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\underline{z}}{2}+\frac{\underline{z}^2}{2^2}+\ldots+\frac{\underline{z}^n}{2^n}+\ldots\right). \tag{3.15}$$

Аналогично поступим с дробью $1/(\underline{z}-1)$

$$-\frac{1}{\underline{z}-1} = \frac{-1}{\underline{z}\left(1-\frac{1}{\underline{z}}\right)} = -\frac{1}{\underline{z}}\left(1+\frac{1}{\underline{z}}+\cdots+\frac{1}{\underline{z}^n}+\cdots\right). \tag{3.16}$$

Складывая (3.15) и (3.16), получим искомый ряд для функции (3.14)

$$\frac{1}{(\underline{z}-1)(\underline{z}-2)} = -\frac{1}{2}-\frac{\underline{z}}{2^2}-\frac{\underline{z}^2}{2^3}-\cdots-\frac{\underline{z}^n}{2^{n+1}}-\cdots-\frac{1}{\underline{z}}-\frac{1}{\underline{z}^2}-\cdots-\frac{1}{\underline{z}^n}-\cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \underline{z}^n$$

где $\underline{c}_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, $\underline{c}_{-n} = -1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.12 Нули и особые точки

Если в точке $\underline{z} = \underline{z}_0$ $f(\underline{z}) = 0$, то эта точка называется *нулем функции*.

Точка, принадлежащая области аналитичности *G*, называется *изолированной особой точкой*, если вокруг нее можно описать круг, не содержащий других особых точек. Например, функция

$$f(\underline{z}) = \sin\frac{1}{\underline{z}}$$

имеет в точке $\underline{z} = 0$ изолированную особую точку, так как в ней $f(\underline{z})$ не определена, но в любой ее окрестности эта функция является аналитической.

В основу классификации изолированных особых точек может быть положен вид разложения функции в ряд Лорана в

окрестности особых точек. Изолированная особая точка $\underline{z} = \underline{z}_0$ называется:

1) *устранимой*, если существует конечный предел

$$\lim_{\underline{z} \to \underline{z}_0} f\left(\underline{z}\right) = A \neq \infty;$$

2) полюсом, если

$$\lim_{\underline{z} \to \underline{z}_0} f(\underline{z}) = \infty;$$

3) *существенно особой точкой*, если не существует $\lim\limits_{\underline{z} \to \underline{z}_0} f\left(\underline{z}\right)$.

3.13 Понятие о вычете

Вычетом функции $f\left(\underline{z}\right)$ в изолированной особой точке $\underline{z} = \underline{z}_0$, $\left(\underline{z}_0 \neq \infty\right)$ называется величина

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C f\left(\underline{z}\right) d\underline{z},$$

где C – достаточно малая окружность, такая, что в описываемом ею круге нет других особых точек, кроме $\underline{z} = \underline{z}_0$. Величина вычета не зависит от радиуса. Обход контура C ведется против часовой стрелки.

Обозначается вычет функции $f\left(\underline{z}\right)$ в точке $\underline{z} = \underline{z}_0$ следующим образом: $\operatorname{Res}\limits_{\underline{z}=\underline{z}_0} f\left(\underline{z}\right)$. Как видно из формулы (3.13), при $k = -1$ следует, что

$$\operatorname{Res}_{\underline{z}=\underline{z}_0} f\left(\underline{z}\right) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f\left(\underline{\zeta}\right)}{\left(\underline{\zeta} - \underline{z}_0\right)^{-1+1}} d\underline{\zeta} = \frac{1}{2\pi j} \int_C f\left(\underline{\zeta}\right) d\underline{\zeta} = \underline{c}_{-1},$$

где $\underline{c}_{-1}$ – коэффициент ряда Лорана при $k = -1$.

Если особая точка $\underline{z} = \underline{z}_0$ является устранимой, то вычет в ней равен нулю.

Дадим определение вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть в окрестности точки $\underline{z}_0 = \infty$ функция $f\left(\underline{z}\right)$ допускает разложение в ряд Лорана

$$f\left(\underline{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{c}_k\,\underline{z}^k\ .$$

Тогда вычет в бесконечно удаленной точке определяется формулой

$$\operatorname*{Res}_{\underline{z}=\infty} f\left(\underline{z}\right)=\frac{1}{2\pi j}\int_C f\left(\underline{z}\right)d\,\underline{z}=-\underline{c}_{-1},$$

где C – окружность достаточно большого радиуса, обход которой выполняется по часовой стрелке (бесконечно удаленная точка остается слева). При этом вне этой окружности не должно быть других особых точек функции $f\left(\underline{z}\right)$, отличных от бесконечно удаленной точки.

3.14 Теорема о вычетах

С помощью вычетов можно значительно облегчить вычисление интегралов от функций комплексного переменного. Следующая теорема показывает, как это можно сделать.

Пусть C_0 – простой замкнутый контур, на котором функция $f\left(\underline{z}\right)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных особых точек $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, ..., $\underline{z}_n$ внутри круга.

Тогда интеграл функции комплексного переменного

$$\int_C f\left(\underline{z}\right)d\,\underline{z}=2\pi j\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\underline{z}=\underline{z}_k}\left(f\left(\underline{z}\right)\right). \tag{3.17}$$

3.15 Вычет относительно полюса

Допустим, что точка $\underline{z}_0$ является полюсом функции $f\left(\underline{z}\right)$, аналитичной в окрестности точки $\underline{z}_0$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{\underline{z}=\underline{z}_0} f\left(\underline{z}\right)=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{\underline{z}\to\underline{z}_0}\frac{d^{r-1}}{d\,\underline{z}^{r-1}}\left[f\left(\underline{z}\right)\left(\underline{z}-\underline{z}_0\right)^r\right], \tag{3.18}$$

где r – кратность полюса. Отметим, что $0!=1$, а производная

нулевого порядка $\dfrac{d^0 f(\underline{z})}{d\underline{z}^0} = f(\underline{z})$.

В электротехнике функция $f(\underline{z})$ часто представлена в виде правильных дробей $B_m(\underline{z})$ и $A_n(\underline{z})$:

$$f(\underline{z}) = \frac{B_m(\underline{z})}{A_n(\underline{z})},$$

причем $B_m(\underline{z} = \underline{z}_0) \neq 0$ (т.е. $\underline{z} = \underline{z}_0$ не является нулем $B_m(\underline{z})$). Тогда, согласно (3.18),

$$\operatorname*{Res}_{\underline{z}=\underline{z}_0} f(\underline{z}) = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{\underline{z}\to\underline{z}_0} \frac{d^{r-1}}{d\underline{z}^{r-1}} \left[\frac{\dfrac{B_m(\underline{z})}{A_n(\underline{z})}}{(\underline{z}-\underline{z}_0)^r} \right]. \tag{3.19}$$

Пример 3.6 *Определить вычет функции* $f(\underline{z}) = \dfrac{1}{\underline{z}^2+1}$ *в особой точке* $\underline{z} = j$.

В соответствии с (3.19)

$$\operatorname*{Res}_{\underline{z}\to j} f(\underline{z}) = \lim_{\underline{z}\to j} \frac{1}{\dfrac{\underline{z}^2+1}{\underline{z}-j}} = \lim_{\underline{z}\to j} \frac{1}{\underline{z}+j} = -\frac{j}{2}.$$

Пример 3.7 *Определить вычет функции* $f(\underline{z}) = \dfrac{\underline{z}}{(\underline{z}+1)^2}$ *в особой точке* $\underline{z} = -1$.

Кратность полюса равна 2. Согласно (3.19)

$$\operatorname*{Res}_{\underline{z}=-1} f(\underline{z}) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{\underline{z}\to-1} \frac{d}{d\underline{z}} \left[\frac{\dfrac{\underline{z}}{(\underline{z}+1)^2}}{(\underline{z}+1)^2} \right] = \lim_{\underline{z}\to-1} \frac{d}{d\underline{z}}(\underline{z}) = \lim_{\underline{z}\to-1}(1) = 1$$

ГЛАВА 4

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразованием Лапласа функции действительного переменного $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая формулой

$$F(p) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \tag{4.1}$$

Преобразуемая функция $f(t)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1) функция $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0+$; это значит, что она или непрерывна, или имеет точки разрыва только первого рода, причем их число конечно;

2) функция $f(t) \equiv 0$ при $t \leq 0-$;

3) при возрастании t модуль $f(t)$ может возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции, т.е.

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}\,,$$

где M и α – постоянные. Условию 3) удовлетворяют все ограниченные функции (в частности, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$), степенные функции t^k, так как любая такая функция растет медленнее, чем e^t. Можно отметить, что этим условиям удовлетворяют все сигналы, имеющие место в физических процессах. В этом случае функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(p)$ комплексного параметра p – *изображением.*

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ или $F(p) \Leftrightarrow f(t)$, а само преобразование оригинала $f(t)$ в изображение $F(p)$ обозначается равенством $F(p) = L\{f(t)\}$.

Пример 4.1 *Определить изображение единичной функции (рис. 4.1)*

$$1(t)=\begin{cases}1, t\ge 0+,\\ 0, t\le 0-.\end{cases}$$

Согласно (4.1)

$$F(p)=\int_{0+}^{\infty}1(t)e^{-pt}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-pt}dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{p},$$

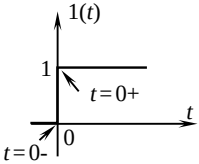


Рис. 4.1 Единый скачок

если $e^{-pt}\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку $p=\sigma+j\omega$, то $\left|e^{-pt}\right|=\left|e^{-\sigma t-j\omega t}\right|=\left|e^{-\sigma t}(\cos\omega t-j\sin\omega t)\right|=\left|e^{-\sigma t}\right|$. Последнее выражение стремится к нулю при $t\to\infty$, если $\sigma=\sigma_0>0$. Число σ_0 называют *абсциссой сходимости* интеграла (4.1)

4.1.1 Свойства преобразования Лапласа

А. *Свойство линейности*. Для любых действительных или комплексных постоянных $\underline{a}$ и $\underline{b}$ линейной комбинации оригиналов соответствует такая же комбинация изображений:

$$\underline{a}f(t)+\underline{b}g(t)\Leftrightarrow \underline{a}F(p)+\underline{b}G(p). \qquad (4.2)$$

Пример 4.2 *Найти изображение напряжения на зажимах резистора R (рис. 4.2)*

Согласно (4.2):

$$u_R(t)=Ri(t)\Leftrightarrow RI(p)=U_R(p). \qquad (4.3)$$

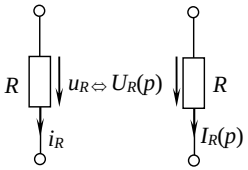


Рис. 4.2 Уравнения резистора

Б. *Дифференцирование оригинала*. Если функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t)\Leftrightarrow pF(p)-f(0+), \qquad (4.4)$$

где $F(p)\Leftrightarrow f(t)$, $f(0+)=\lim\limits_{t\to 0+}f(t)$ – предел функции $f(t)$ справа.

Применяя правило (4.4) повторно и полагая, что $\varphi(t)=f'(t)$, $\varphi(t)\Leftrightarrow\Phi(p)$, $f(t)\Leftrightarrow F(p)$, получим

$$f''(t) = \left[\varphi(t)\right]' \Leftrightarrow p\Phi(p) - \varphi(0+) =$$
$$= p\left[pF(p) - f(0+)\right] - f'(0+) = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+),$$

или для любого n

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

Отметим, что при нулевых начальных условиях $f^{(n-1)}(0+) = f^{(n-2)}(0+) = \cdots = f'(0+) = f(0+) = 0$ n-кратное дифференцирование оригинала приводит к умножению его изображения на p^n

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^nF(p). \tag{4.5}$$

:

Пример 4.3 *Определить изображение напряжения на зажимах индуктивности L.*

По формуле (4.3) находим, что

$$u_L(t) = Li_L'(t) \Leftrightarrow L\left(pI_L(p) - i_L(0+)\right) = pLI_L(p) - Li_L(0+) = U_L(p). \tag{4.6}$$

Изображение индуктивности в операторных схемах, соответствующее формуле (4.6) приведено на рис. 4.3

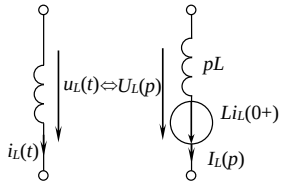


Рис. 4.3 Уравнения индуктивности

В. *Интегрирование оригинала*. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то

$$\int_{0+}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \tag{4.7}$$

Пример 4.4 *Найти изображение напряжения на зажимах конденсатора C (рис. 4.4).*

В соответствии с (4.7):

$$u_C(t) = u_C(0+) + \frac{1}{C}\int_{0+}^{t} i_C(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{pC}I_C(p) + \frac{u_C(0+)}{p}.$$

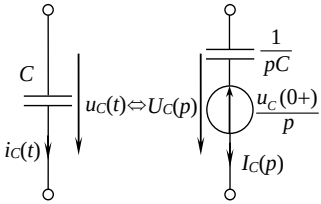


Рис. 4.4 Уравнения емкости

Г. *Запаздывание оригинала*. Пусть $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Для любого постоянного $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-p\tau}F(p).$$

Таким образом, запаздыванию оригинала на время τ (рис. 4.5) соответствует умножение изображения $F(p)$ на $e^{-p\tau}$.

Д. *Изображение свертки или теорема умножения изображений*. Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется интеграл

$$\int_{0+}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

и обозначается обычно символом $f * g$. Свертка коммутативна

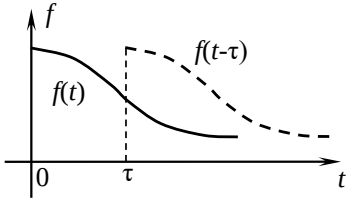


Рис. 4.5 Запаздывание оригинала

$$\int_{0+}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0+}^{t} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

или

$$f * g = g * f.$$

Сформулируем теорему умножения изображений. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, $g(t) \Leftrightarrow G(p)$, то свертке $f * g$ соответствует произведение изображений

$$f * g \Leftrightarrow F(p)G(p). \tag{4.8}$$

Пример 4.5 *Найти изображение выходного сигнала линейной системы с импульсной характеристикой* $w(t) = e^{-\alpha t}$, *на входе которой действует сигнал* $u(t) = 1(t)$. *Начальные условия системы нулевые.*

Как известно, выходной сигнал линейной системы определяется как

$$u_1(t) = \int_{0+}^{t} u(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Поскольку

$$W(p) = L\{w(t)\} = L\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{p+\alpha},$$

а

$$U_0(p) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p},$$

то согласно (4.8) получим

$$U_1(p) = U_0(p)W(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p+\alpha}.$$

Е. *Теорема о начальном значении оригинала*. Если $f'(t)$ является оригиналом, а изображение $F(p)$ функции $f(t)$ – функция аналитическая в бесконечности, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0+). \tag{4.9}$$

Формула (4.9) позволяет определить по изображению начальное значение функции.

Пример 4.6 *Найти начальное значение оригинала* $u(t)$, *если его изображение*

$$U(p) = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Согласно (4.9) получим

$$u(0+) = \lim_{t\to 0+} u(t) = \lim_{p\to\infty} p\frac{1}{p+\alpha} = 1.$$

Результат нетрудно проверить, используя соответствие $\frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha t}$:

$$\lim_{t\to 0+} e^{-\alpha t} = 1.$$

Ж. *Теорема о предельном значении оригинала*. Если $f'(t)$ является оригиналом и существует предел функции $f(t)$ при $t\to\infty$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty). \tag{4.10}$$

Нетрудно видеть, что (4.10) позволяет определить значение функции при $t=\infty$, если предел от $f(t)$ в точке $t=\infty$ существует.

Пример 4.7 *Определить предельное значение оригинала из пример 4.6.*

Поскольку оригинал $e^{-\alpha t}$ имеет предел при $t\to\infty$, то применение соотношения (4.10) справедливо. Получим

$$u(\infty)=\lim_{t\to\infty}u(t)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p+\alpha}=0\ .$$

4.2 Определение оригинала по изображению

4.2.1 Теорема обращения(обратное преобразование Лапласа)

Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ – ее изображением, то в любой точке t, где оригинал $f(t)$ непрерывен, имеет место формула

где интегрирование ведется по любой бесконечной прямой

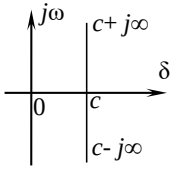


Рис. 4.6

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}dp\ , \qquad (4.11)$$

$\mathrm{Re}\,p=c$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла от $F(p)$ (рис. 4.6).

В электротехнике формулой (4.11) обычно не пользуются, поскольку для практических целей существуют более простые методы обращения.

4.2.2 Формулы разложения

В соответствии с основной теоремой о вычетах (3.17) формула (4.11) примет вид

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Пусть $F(p)$ рациональная функция, т.е. представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(p)=\frac{B_m(p)}{A_n(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ \ \dots\ \ +b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ \ \dots\ \ +a_{n-1}p+a_n} \qquad (4.12)$$

причем $m<n$; коэффициенты b и a – действительные. Тогда, используя формулы вычисления вычетов, получим необходимые формулы разложения. Их вид зависит от характера корней

знаменателя $A_n(p)$ изображения (4.12). Учтем, что $A_n(p)$ – функция дифференцируемая.

А. *Корни* $A_n(p)$ *простые действительные*

Согласно (3.19)

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_m(p_k)}{\left[\dfrac{A_n(p)}{p-p_k}\right]_{p=p_k}}e^{p_k t} \tag{4.13}$$

Пример 4.8 *Найти оригинал изображения* $F(p)=\dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}$.

Корни знаменателя (полюсы $F(p)$)

$$A_2(p)=(p+1)(p+2)$$

равны $p_1=-1$ **И** $p_2=-2$. По формуле (4.13) имеем

$$f(t)=\frac{-1+3}{\left[\dfrac{(p+1)(p+2)}{(p+1)}\right]_{p=-1}}e^{-t}+\frac{-2+3}{\left[\dfrac{(p+1)(p+2)}{(p+2)}\right]_{p=-2}}e^{-2t}=2e^{-t}-e^{-2t}.$$

Б. Корни $A_n(p)$ комплексные сопряженные

Пусть такими корнями являются $p_k=p^*_{k+1}$. В этом случае формула разложения для этих корней имеет следующий вид:

$$f(t)=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{B_m(p_k)}{\left[\dfrac{A_n(p)}{p-p_k}\right]_{p=p_k}}e^{p_k t}\right\} \tag{4.14}$$

Пример 4.9 *Найти оригинал изображения* $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+1}$.

Корни знаменателя $A_2(p)=p^2+1=0$ комплексные $p_{1,2}=\pm j$. Оригинал определим по (4.14) при $p_1=j$:

$$f(t)=2\operatorname{Re}\left\{\frac{j+1}{\left[\frac{(p+j)(p-j)}{(p-j)}\right]_{p=j}}e^{jt}\right\}=2\operatorname{Re}\left\{\frac{j+1}{2j}(\cos t+j\sin t)\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\{(1-j)(\cos t+j\sin t)\}=\cos t+\sin t.$$

В. *Корни* $A_n(p)$ *кратные*

Пусть p_k является r_k -кратным корнем. Тогда согласно (3.19) ему соответствует составляющая

$$f_k(t)=\frac{1}{(r_k-1)!}\left[\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left\{\frac{\frac{B_m(p)}{A_n(p)}}{(p-p_k)^{r_k}}e^{pt}\right\}\right]_{p=p_k}. \qquad (4.15)$$

Пример 4.10 *Найти оригинал изображения* $F(p)=\dfrac{p+1}{(p+2)^3}$.

Корни $A_3(p)=(p+2)^3=0$ кратные

$$p_{1,2,3}=-2.$$

Согласно (4.15) будем иметь

$$f(t)=\frac{1}{(3-1)!}\left[\frac{d^{3-1}}{dp^{3-1}}\left\{\frac{\frac{p+1}{(p+2)^3}}{(p+2)^3}e^{pt}\right\}\right]_{p=-2}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dp}\left\{e^{pt}+(p+1)te^{pt}\right\}\right]_{p=-2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[te^{pt}+te^{pt}+(p+1)t^2e^{pt}\right]_{p=-2}=\left(t-0,5t^2\right)e^{-2t}.$$

4.2.3 Использование таблиц изображений

Существуют таблицы соответствия между оригиналами и изображениями [9]. Чтобы воспользоваться ими, нужно изображение

$$F(p)=\frac{B_m(p)}{A_n(p)} \qquad (m<n) \tag{4.16}$$

разложить на простые дроби. Рассмотрим несколько частных случаев, встречающихся на практике.

1. Если $A_n(p)=0$ имеет только простые действительные корни, например $p_1,\ p_2,\cdots,p_n$, то (4.16) имеет следующее разложение:

$$F(p)=\frac{K_1}{p-p_1}+\frac{K_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{p-p_n},$$

где $K_1,\ \ K_2,\ \ \ldots\ \ ,K_n$ – произвольные постоянные.

2. Если корни уравнения $A_n(p)=0$ действительные и кратные, например p_k – корень кратности r_k, и пусть

$$\sum_{k=1}^{q} r_k = n,$$

тогда

$$F(p)=\sum_{k=1}^{r_1}\frac{K_{1k}}{\left(p-p_1\right)^k}+\sum_{k=1}^{r_2}\frac{K_{2k}}{\left(p-p_2\right)^k}+\quad\cdots\quad+\sum_{k=1}^{r_q}\frac{K_{qk}}{\left(p-p_q\right)^k},$$

где $K_{1k},\ \ K_{2k},\ \ \ldots\ \ ,K_{qk}$ – произвольные постоянные.

3. Если уравнение $A_n(p)=0$ имеет также q комплексных корней $p_{1k}=p_{2k}^*$ таких, что $\left(p-p_{1k}\right)\left(p-p_{2k}\right)=p^2+a_k p+c_k$, то

$$F(p)=\sum_{k=1}^{q}\frac{K_k+S_k p}{p^2+a_k p+c_k},$$

где K_k и S_k – произвольные постоянные.

4.3 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом Лапласа

В этом случае дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические и решаются довольно просто.

А. *Решение одного дифференциального уравнения.* Пусть дано уравнение

$$a_n u_1^{(n)} + a_{n-1} u_1^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_0 u_1 = b_m u_0^{(m)} + b_{m-1} u_0^{(m-1)} + \ \ldots \ + b_0 u_0 \qquad (4.17)$$

Ход его решения можно разделить на три этапа:

а) *преобразование уравнения по Лапласу*. Преобразуем каждый член уравнения

$$L\left\{a_n u_1^{(n)}\right\} = a_n L\left\{u_1^{(n)}\right\} = a_n\left[p^n U_1(p) - p^{n-1}u_1(0+) - p^{n-2}u_1'(0+) - \cdots - u_1^{(n-1)}(0+)\right],$$

$$L\left\{a_{n-1} u_1^{(n-1)}\right\} = a_{n-1}\left[p^{n-1} U_1(p) - p^{n-2}u_1(0+) - p^{n-3}u_1'(0+) - \cdots - u_1^{(n-2)}(0+)\right],$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$L\left\{a_0 u_1\right\} = a_0 U_1(p),$$

$$L\left\{b_m u_0^{(m)}\right\} = b_m\left[p^m U_0(p) - p^{m-1}u_0(0+) - p^{m-2}u_0'(0+) - \cdots - u_0^{(m-1)}(0+)\right],$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$L\left\{b_0 u_0\right\} = b_0 U_0(p).$$

После подстановки полученных изображений в (4.17) исходное дифференциальное уравнение превращается в алгебраическое относительно изображения $U_1(p)$:

$$\begin{aligned}
&U_1(p)\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ \cdots \ + a_0\right) = \\
&= U_0(p)\left(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ \cdots \ + b_0\right) + \\
&+ u_1(0+)\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \ \cdots \ + a_1\right) + \\
&+ u_1'(0+)\left(a_n p^{n-2} + a_{n-1}p^{n-3} + \ \cdots \ + a_2\right) + \ \cdots \ + u_1^{(n-1)}(0+)a_n \\
&- u_0(0+)\left(b_m p^{m-1} + b_{m-1}p^{m-2} + \ \cdots \ + b_1\right) - \\
&- u_0'(0+)\left(b_m p^{m-2} + b_{m-1}p^{m-3} + \ \cdots \ + b_2\right) - \ \ldots \ - u_0^{(m-1)}(0+)b_m \ .
\end{aligned} \qquad (4.18)$$

Обозначим многочлен, содержащий начальные значения входного воздействия u_0 и выходного сигнала u_1, через $M_0(p)$ и примем

$$B_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0 ,$$
$$A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0 . \qquad (4.19)$$

Тогда уравнение (4.18) можно записать более компактно:

$$U_1(p) A_n(p) = U_0(p) B_m(p) + M_0(p) . \qquad (4.20)$$

б) *решение уравнения* (4.20) *относительно* $U_1(p)$:

$$U_1(p) = U_0(p) \frac{B_m(p)}{A_n(p)} + \frac{M_0(p)}{A_n(p)} \qquad (4.21)$$

в) *определение оригинала* $u_1(t)$, соответствующего изображению $U_1(p)$, по формулам разложения или таблицам оригиналов.

Б. *Решение системы дифференциальных уравнений*. Решение системы аналогично решению одного дифференциального уравнения. Пусть дана нормальная система уравнений

$$\begin{aligned}
&u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n + f_1(u_0),\\
&u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n + f_2(u_0),\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&u_n' = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n + f_n(u_0)
\end{aligned}$$

с начальными значениями $u_1(0+),\ u_2(0+),\ \ldots,\ u_n(0+)$.

Покажем ее решение:

а) преобразуем систему по Лапласу и получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&U_1(p)\left(a_{11} - p\right) + U_2(p)a_{12} + \cdots U_n(p)a_{1n} = -F_1(p) - u_1(0+),\\
&U_1(p)a_{21} + U_2(p)\left(a_{22} - p\right) + \cdots + U_n(p)a_{2n} = -F_2(p) - u_2(0+),\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&U_1(p)a_{n1} + U_2(p)a_{n2} + \cdots + U_n(p)\left(a_{nn} - p\right) = -F_n(p) - u_n(0+);
\end{aligned}$$

б) нас интересует связь между входом и выходом, поэтому решим эту систему относительно $U_1(p)$

$$U_1(p)=\frac{\begin{vmatrix} -F_1(p)-u_1(0+) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -F_2(p)-u_2(0+) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -F_n(p)-u_n(0+) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-p \end{vmatrix}}\ ; \qquad (4.22)$$

в) определим оригинал $u_1(t)$.

ПРИМЕЧАНИЯ.

1. Для того чтобы с помощью преобразования Лапласа получить выражение для выходного сигнала, необязательно систему приводить к нормальной форме. Достаточно записать все необходимые уравнения четырехполюсника и применить преобразование Лапласа.

2. Нетрудно видеть, что многочлен (4.19) и знаменатель в (4.22) представляют собой характеристический многочлен системы, а числители содержат сведения об изображении входного воздействия и начальных условиях. Из (4.21) и (4.22) следует, что свободный процесс в линейной системе состоит из двух частей. Первая полностью зависит от вида входного воздействия $u_0(t)$, а вторая определяется начальными условиями $M_0(p)$, т.е. энергетическим состоянием системы до коммутации.

ГЛАВА 5

СИСТЕМНЫЕ ФУНКЦИИ

5.1 ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Функцию

$$H(p)=\frac{U_1(p)}{U_0(p)},$$

полученную при нулевых начальных условиях (при нулевых переменных состояния, т.е. при $M_0(p)=0$ в (4.21)), называют передаточной.

Для систем с постоянными коэффициентами из (4.21) следует, что

$$H(p)=\frac{U_1(p)}{U_0(p)}=\frac{B_m(p)}{A_n(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}. \qquad (5.1)$$

Одно из замечательных свойств передаточной функции заключается в том, что она не зависит от воздействия, приложенного к системе, и полностью определяется параметрами системы.

5.2 АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) системы называется функция

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{U_1(j\omega)}{U_0(j\omega)}.$$

Она может быть получена из передаточной функции системы путем подстановки $p=j\omega$. АФЧХ характеризует свойства системы при синусоидальном входном воздействии и определяет изменение амплитуды и фазы синусоидального сигнала при прохождении им через систему *в установившемся режиме*. Графически АФЧХ представляется в виде годографа на плоскости с координатными осями $U(\omega)$ и $jV(\omega)$, поскольку

$$\underline{H}(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega).$$

Здесь $U(\omega)$ – вещественная, $V(\omega)$ – мнимая части $\underline{H}(j\omega)$.

5.3 Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики

АФЧХ может быть представлена через модуль и фазу

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Величина

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \tag{5.2}$$

характеризующая зависимость модуля АФЧХ от частоты ω, называется амплитудно-частотной (АЧХ), а величина

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[V(\omega)/U(\omega)\right], \tag{5.3}$$

определяющая зависимость фазы от частоты ω, – фазо-частотной характеристикой (ФЧХ).

5.4 Экспоненциальная характеристика

Апериодическая составляющая

$$u_0(t) = A_0 e^{-\alpha t},$$

подведенная ко входу линейной системы, появляется на ее выходе с измененным начальным значением A_1

$$u_1(t) = A_1 e^{-\alpha t}.$$

Если известна передаточная функция $H(p)$ системы, то связь A_1 с A_0 легко найти. Для этого нужно в передаточную

$$A_1 = A_0 H(-\alpha). \tag{5.4}$$

функцию $H(p)$ подставить $p = -\alpha$. Тогда

Справедливость (5.4) следует непосредственно из формулы разложения (4.13).

5.5 Обобщённая частотная характеристика

Подобно тому, как амплитудно-фазовая частотная характеристика вобрала в себя амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, обобщенная частотная характеристика $\underline{H}(-\alpha, j\omega)$, объемлет собой частотную и экспоненциальную характеристики системы и определяет установившийся режим системы при воздействии затухающей синусоидальной величины

$$u_0(t) = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_0)\,. \tag{5.5}$$

Учитывая, что выходной сигнал будет аналогичен (5.5)

$$u_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_1)\,,$$

можно установить следующие зависимости между входным и выходным сигналами

$$A_1 = A_0 \left|\underline{H}(-\alpha, j\omega)\right| = A_0 H(-\alpha, \omega)\,, \tag{5.6}$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \arg\{\underline{H}(-\alpha, j\omega)\} = \psi_0 + \varphi(-\alpha, \omega)\,, \tag{5.7}$$

где $\underline{H}\left(\alpha, j\omega\right) = H\left(p = -\alpha + j\omega\right)$.

Очевидно, что (5.2) и (5.3) являются частными случаями характеристик (5.6) и (5.7) при $\alpha = 0$

$$H(\omega) = H(0, \omega)\,,$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(0, \omega)\,.$$

В то же время экспоненциальная характеристика $H(-\alpha)$ является частным случаем обобщенной характеристики $H(-\alpha, \omega)$ при $\omega = 0$.

По аналогии с (5.2) и (5.3) характеристики $H(-\alpha, \omega)$ и $\varphi(-\alpha, \omega)$ можно назвать обобщенными АЧХ и ФЧХ.

5.6 Определение реакции цепи с помощью передаточной функции

В общем случае реакцию цепи на входное воздействие можно определить по (4.21), принимая во внимание (5.1)

$$U_1(p) = U_0(p)H(p) + \frac{M_0(p)}{A_n(p)}. \qquad (5.8)$$

Отсюда следует, что свободный процесс системы состоит из двух частей. Первая из них

$$u'_{1\text{св}}(t) = L^{-1}\left\{\frac{M_0(p)}{A_n(p)}\right\}_{A_n(p)=0}$$

зависит от начальных условий системы $M_0(p)$, а вторая

$$u''_{1\text{св}}(t) = L^{-1}\left\{U_0(p)\frac{B_m(p)}{A_n(p)}\right\}_{A_n(p)=0} -$$

от вида входного воздействия $U_0(p)$. Составляющие обеих частей должны вычисляться только для корней характеристического уравнения $A_n(p) = 0$ системы.

Отметим, что принужденная составляющая выходного сигнала системы

$$u_{1\text{пр}} = L^{-1}\left\{U_0(p)\frac{B_m(p)}{A_n(p)}\right\}_{\text{полюса } U_0(p)}$$

определяется полюсами изображения входного сигнала $U_0(p)$.

В частном случае, когда начальные условия цепи нулевые $\left(M_0(p) = 0\right)$, выражение (5.8) упрощается

$$U_1(p) = U_0(p)H(p). \qquad (5.9)$$

5.7 Переходная и импульсная характеристики

Динамические характеристики линейной системы определяются переходной и импульсной характеристиками (функциями).

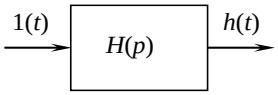


Рис. 5.1 Определение переходной функции

Переходной функцией $h(t)$ называется реакция системы, имеющей нулевые начальные условия, на единичную функцию $1(t)$ (рис. 5.1). Поскольку для $u_0(t) = 1(t)$ изображение $U_0(p) = 1/p$, то согласно (5.9)

$$U_1(p) = \frac{1}{p} H(p) .$$

Таким образом, переходная функция системы получается путем обратного преобразования Лапласа передаточной функции $H(p)$, поделенной на p,

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{H(p)}{p}\right\} \qquad (5.10)$$

Импульсной функцией $w(t)$ называется реакция системы, имеющей нулевые начальные условия, на δ-импульс (рис. 5.2). Для δ-импульса (рис. 5.3) характерно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \; L\{\delta(t)\} = 1 .$$

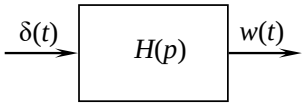


Рис. 5.2 Определение импульсной (весовой) функции

Согласно (5.9)

$$U_1(p) = 1 \cdot H(p) ,$$

или

$$w(t) = L^{-1}\{H(p)\} . \qquad (5.11)$$

Таким образом, импульсная характеристика системы получается путем обратного преобразования по Лапласу передаточной функции.

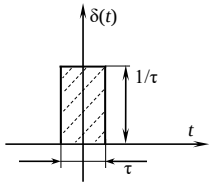


Рис. 5.3 Определение δ-импульса (τ→0)

Сопоставляя свойства (4.5), (5.10) и (5.11), можно прийти к следующей связи между динамическими характеристиками:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} .$$

Непосредственно из свойства (4.8) преобразования Лапласа и формулы (5.9) следует, что выходной сигнал линейной системы определяется сверткой входного сигнала с импульсной характеристикой системы

$$u_1(t) = \int_0^{\infty} w(\tau)u_0(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} u_0(\tau)w(t-\tau)d\tau ,$$

т.е. значение выходного сигнала $u_1(t)$ является взвешенной линейной интегральной суммой по всей реализации входного

сигнала $u_0(t)$. В связи с этим часто импульсную функцию называют еще и *весовой* функцией.

Пример 5.1 *Определить системные функции цепи (рис. 5.4).*

Определим передаточную характеристику. Предварительно составим уравнение цепи

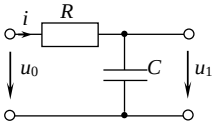


Рис. 5.4

$$i = \frac{u_0 - u_1}{R} = C\frac{du_1}{dt}.$$

Отсюда получаем уравнение типа "вход-выход"

$$RCu_1' + u_1 = u_0.$$

Преобразуем по Лапласу

$$U_1(p)\left(pRC + 1\right) = U_0(p) + u_1(0+).$$

Тогда

$$\frac{U_1(p)}{U_0(p)} = \frac{1}{pRC+1} + \frac{u_1(0+)}{\left(pRC+1\right)U_0(p)}.$$

Передаточная функция

$$H(p) = \frac{1}{pRC+1} = \frac{1}{p\tau+1},$$

где $\tau = RC$.

Амплитудно-фазочастотная характеристика

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau+1} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

является амплитудно-частотной характеристикой, а

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega\tau) \quad -$$

фазо-частотной. Вещественная и мнимая составляющие АФЧХ определяются следующим образом:

$$U(\omega) = H(\omega)\cos\varphi(\omega),$$

$$V(\omega) = H(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

Частотные характеристики приведены на рис. 5.5.

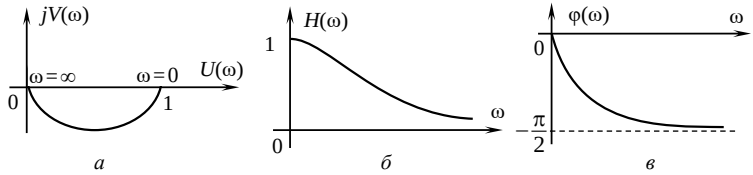


Рис. 5.5 Частотные характеристики: а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

По определению (5.10) переходная функция

$$h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}H(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p\tau+1} \Leftrightarrow 1-e^{-t/\tau}.$$

Согласно (5.11) импульсная функция

$$w(t) \Leftrightarrow H(p) = \frac{1}{p\tau+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

Графики обеих функций приведены на рис. 5.6.

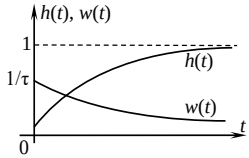


Рис. 5.6 Динамические характеристики

5.8 Определение передаточной функции замкнутой системы

Пусть задана система с замкнутой цепью обратной связи (рис. 5.7). Определим передаточную функцию замкнутой системы, полагая, что передаточные функции главной части системы $H(p)$ и цепи обратной связи $K(p)$ известны.

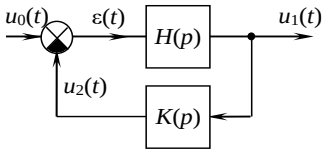


Рис. 5.7

Из рис. 5.7 видно, что

$$U_1(p) = E(p)H(p),$$

где $\varepsilon(t) \Leftrightarrow E(p)$.

Поскольку $E(p) = U_0(p) - U_2(p)$, а $U_2(p) = K(p)U_1(p)$, то изображение выходного сигнала

$$U_1(p) = \left[U_0(p) - K(p)U_1(p)\right]H(p).$$

Приведем одинаковые члены; тогда передаточная функция замкнутой системы будет иметь следующий вид:

$$W(p) = \frac{U_1(p)}{U_0(p)} = \frac{H(p)}{1+K(p)H(p)}.$$

ГЛАВА 6

КРИТЕРИИ НАЙКВИСТА

6.1 КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА ДЛЯ СИСТЕМ, УСТОЙЧИВЫХ В РАЗОМКНУТОМ СОСТОЯНИИ

Пусть разомкнутая система имеет АФЧХ

$$W(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \tag{6.1}$$

в которой порядок полинома числителя для физически реализуемых систем не превышает порядка полинома знаменателя. Как известно, знаменатель $A(j\omega)$ является характеристическим многочленом для разомкнутой системы.

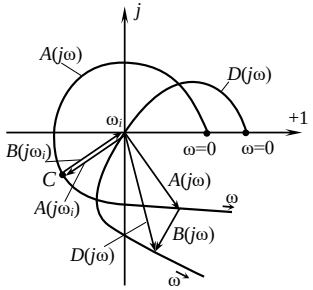


Рис. 6.1 Годографы Михайлова для разомкнутой *A(jω)* и замкнутой *D(jω)* систем

Допустим, что разомкнутая система устойчива. В этом случае все корни характеристического уравнения $A(\lambda)=0$ находятся в левой полуплоскости, нулевых и мнимых корней нет. Построим характеристическую кривую $A(j\omega)$ на комплексной плоскости (рис. 6.1). Она соответствует устойчивой разомкнутой системе согласно критерию Михайлова.

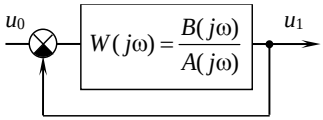


Рис. 6.2 Замкнутая система

Для замкнутой системы (рис. 6.2)

$$\Phi(j\omega)=\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)+B(j\omega)}=\frac{B(j\omega)}{D(j\omega)}.$$

Здесь

$$D(j\omega)=A(j\omega)+B(j\omega) \tag{6.2}$$

– характеристический многочлен замкнутой системы.

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии, может быть неустойчивой в замкнутом состоянии. Предположим, что

замкнутая система находится на границе устойчивости. В этом случае кривая Михайлова $D(j\omega)$ (рис. 6.1) проходит через начало координат при частоте $\omega = \omega_i$. Следовательно, в системе существуют незатухающие колебания с частотой ω_i.

Поскольку вектор $D(j\omega)$ определяется суммой векторов (6.2), то из рис. 6.1 видно, что точки годографов разомкнутой системы $A(j\omega)$ и замкнутой системы $D(j\omega)$ для одной и той же частоты отстоят друг от друга на расстоянии длины вектора $B(j\omega)$. Найдем на годографе $A(j\omega)$ точку *C*, соответствующую частоте ω_i. Поскольку при $\omega = \omega_i$ годограф замкнутой системы $D(j\omega)$ проходит через начало координат, то из построения видно, что векторы $A(j\omega_i)$ и $B(j\omega_i)$ равны по модулю и противоположны по направлению

$$A(j\omega_i) = -B(j\omega_i).$$

В связи с этим АФЧХ разомкнутой системы на частоте $\omega = \omega_i$

$$W(j\omega_i) = \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} = -1.$$

Таким образом, если система в замкнутом состоянии находится на границе устойчивости, то АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку с координатами (-1, *j*0) (рис. 6.3).

Положим теперь, что числитель (6.1) представлен постоянной *K*, т.е. $B(j\omega) = K$. Пусть частота $\omega = \omega_i$ соответствует точке *C* пересечения АФЧХ разомкнутой системы с действительной осью. Если предположить, что $K > |A(j\omega)|$, то точка *F* пересечения годографа $D(j\omega)$ в значении $\omega = \omega_i$ с действительной осью окажется правее начала координат (рис. 6.4).

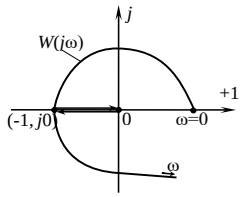


Рис. 6.3 Годограф разомкнутой системы, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости

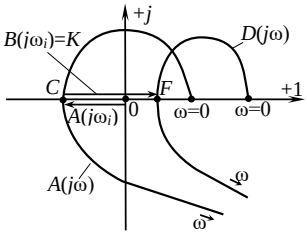


Рис. 6.4 Годографы Михайлова для разомкнутой $A(j\omega)$ и замкнутой $D(j\omega)$ систем

Это означает, что система в замкнутом состоянии неустойчива. Отношение отрезков *CF* и *OC* больше единицы. И поскольку это отношение равно модулю АФЧХ системы при разомкнутой главной обратной связи

$$|W(j\omega)| = \left|\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right| = \frac{K}{|A(j\omega)|} > 1,$$

то система, устойчивая в разомкнутом и неустойчивая в замкнутом состояниях, имеет при разомкнутой главной обратной связи АФЧХ, пересекающую действительную ось левее точки (-1, *j*0). Заметим, что это свойство АФЧХ разомкнутой системы не является достаточным условием для неустойчивости системы в замкнутом состоянии.

Правила, которые устанавливают необходимые и достаточные условия устойчивости замкнутых систем, впервые были сформулированы американским ученым Найквистом в 1932 г. применительно к электронным усилителям с отрицательной обратной связью. Правила получили название критерия Найквиста. Обобщение этого критерия для задач автоматического регулирования осуществил советский ученый Михайлов.

Сущность критерия Найквиста сводится к следующему. Пусть система (рис. 6.2) в разомкнутом состоянии устойчива, и ее АФЧХ $W(j\omega)$ не проходит через начало координат (т.е. система не имеет колебательных процессов). Перепишем характеристический многочлен (6.2) замкнутой системы в виде

$$D(j\omega) = A(j\omega)\left[1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right] = A(j\omega)\left[1 + W(j\omega)\right],$$

откуда следует, что

$$1 + W(j\omega) = D(j\omega)/A(j\omega). \qquad (6.3)$$

Полином числителя (6.3) $D(j\omega)$ определяет характеристический многочлен замкнутой системы, а полином знаменателя $A(j\omega)$ – характеристический многочлен разомкнутой системы.

Так как для реальных систем степень многочлена $B(j\omega)$ всегда меньше или, в крайнем случае, равна степени многочлена $A(j\omega)$, то порядок многочлена $D(j\omega)$ равен порядку характеристического полинома $A(j\omega)$ разомкнутой системы. Пусть этот порядок равен *n*. Поскольку разомкнутая система в нашем случае устойчива, то ее характеристическое уравнение $A(\lambda)=0$ имеет корни, расположенные только в левой полуплоскости. Следовательно, при изменении частоты ω от 0 до ∞ вектор $A(j\omega)$ согласно (2.21) будет иметь приращение $n\pi/2$. Если замкнутая система будет устойчива, то и вектор $D(j\omega)$ будет иметь приращение аргумента, равное той же величине $n\pi/2$ при изменении частоты ω от 0 до ∞. Таким образом, изменение аргумента вектора $1+W(j\omega)$ будет равно

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}\left[1+W(j\omega)\right]=\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}D(j\omega)-\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}A(j\omega)=0\,. \tag{6.4}$$

Если система, устойчивая в разомкнутом состоянии, станет неустойчивой при замыкании главной обратной связи, то ее характеристическое уравнение $D(\lambda)=0$ будет иметь *m* корней в правой полуплоскости. Поэтому приращение аргумента вектора $1+W(j\omega)$ согласно (2.20)

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}\left[1+W(j\omega)\right]=\left(n-2m\right)\frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{2}=-m\pi\,. \tag{6.5}$$

В случае устойчивой замкнутой системы результирующий угол поворота вектора $1+W(j\omega)$ вокруг точки с координатами (-1, *j*0) согласно (6.4) равен нулю (кривая 1 на рис. 6.5). Для системы, неустойчивой в замкнутом состоянии, результирующий угол поворота вектора $1+W(j\omega)$ относительно точки (-1, *j*0) согласно (6.5) отличен от нуля. Этот случай иллюстрируется кривой 2 на рис. 6.5.

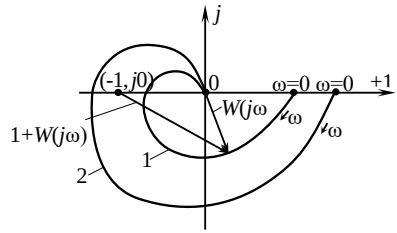


Рис. 6.5 Годографы Михайлова для замкнутых систем: 1 – устойчивой; 2 – неустойчивой

На основании сказанного, а также уравнений (6.4) и (6.5) можно дать следующую формулировку критерия устойчивости Найквиста для случая, когда система в разомкнутом состоянии устойчива.

Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала на действительной оси точку с координатами (-1, j0).

Точка (-1, *j*0) на действительной оси называется *критической*.

6.2 Критерий устойчивости Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии

Пусть разомкнутая система неустойчива. Тогда ее характеристическое уравнение $A(\lambda)=0$ порядка *n* должно иметь *m* корней в правой полуплоскости, а остальные корни располагаются слева от мнимой оси. Для обеспечения устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $D(\lambda)=0$ замкнутой системы находились в левой полуплоскости. Поэтому изменение аргумента вектора (6.3) равно

$$\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}\left[1+W(j\omega)\right]=\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}D(j\omega)-\underset{0\le\omega\le\infty}{\Delta\arg}A(j\omega)=n\frac{\pi}{2}-\left(n-2m\right)\frac{\pi}{2}=2\pi\frac{m}{2}.$$

Отсюда следует, что для устойчивости системы в замкнутом состоянии АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы $W(j\omega)$ должна обходить критическую точку (-1, *j*0) против часовой стрелки $m/2$ раз при возрастании частоты от 0 до ∞.

Следовательно, критерий устойчивости Найквиста в этом случае можно сформулировать следующим образом:

Неустойчивая разомкнутая система с характеристическим уравнением, имеющим m корней в правой полуплоскости, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы при возрастании частоты от 0 до ∞ обходит критическую точку в положительном направлении (против часовой стрелки) $m/2$ *раз.*

На рис. 6.6 показана АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы в предположении, что передаточная функция разомкнутой системы имеет два полюса в правой полуплоскости, т.е. $m = 2$. АФЧХ обходит критическую точку против часовой стрелки один раз. Следовательно, критерий устойчивости при $m = 2$ выполняется.

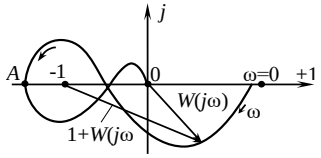


Рис. 6.6 АФЧХ системы, неустойчивой в разомкнутом (т=2) и устойчивой в замкнутом состоянии

Для устранения затруднений при определении угла поворота вектора $1+W(j\omega)$ Я.З. Цыпкиным предложена формулировка критерия, основанная на числе пересечений АФЧХ разомкнутой системы с отрезком действительной оси (-1, -∞), расположенным слева от критической точки. Пересечение действительной оси (-1, -∞) сверху вниз при возрастании частоты (рис. 6.7, *а*) называется положительным переходом, а снизу вверх (рис. 6.7, *б*) – отрицательным. Если АФЧХ начинается на отрезке (-1, -∞) действительной оси (точка $\omega = 0$), то начальную точку принимают за половину положительного (рис. 6.7, *в*) или отрицательного (рис. 6.7, *г*) перехода. С учетом принятого понятия перехода критерий Найквиста формулируется следующим образом:

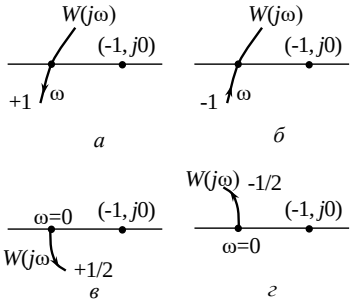


Рис. 6.7 Правила подсчета переходов

Если разомкнутая система неустойчива и ее характеристическое уравнение имеет m корней в правой полуплоскости, то для

устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы число положительных переходов было больше числа отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы через отрезок действительной оси (-1, -∞) на $m/2$ *при возрастании частоты от 0 до ∞.*

Из рис. 6.6 видно, что АФЧХ разомкнутой системы имеет один положительный переход в точке *A*. Отрицательных переходов нет. Поскольку $m = 2$, то разность переходов между числами переходов должна равняться 1. Условие выполняется, и система в замкнутом состоянии устойчива.

6.3 Обобщение критерия Найквиста на случай астатических систем

В астатических системах передаточная функция разомкнутой системы имеет полюс *ν*-го порядка в начале координат, т.е.

$$W(p) = \frac{B(p)}{p^{\nu} A(p)}.$$

Формулировка критерия Найквиста и в этом случае остается такой же, как и для статических систем. Однако прежде чем применять критерий к системам с астатизмом, необходимо АФЧХ разомкнутой системы (рис. 6.8) дополнить дугой бесконечно большого радиуса в положительном направлении (против движения часовой стрелки) с тем, чтобы конец вектора $1+W(j\omega)$ при возрастании частоты от 0 до ∞ перемещался по этой дуге по направлению движения часовой стрелки. Дуга должна соответствовать углу $\nu\pi/2$, где *ν* – порядок астатизма.

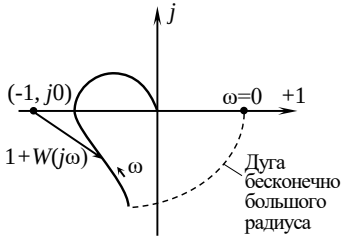


Рис. 6.8 АФЧХ разомкнутой системы с астатизмом первого порядка, добавленная дугой бесконечно большого радиуса

Обобщение критерия Найквиста для астатических систем было выполнено советским ученым Я.З. Цыпкиным.

Пример 6.1 Неустойчивая разомкнутая система с астатизмом первого порядка ($v=1$)

$$W(p)=K\frac{0{,}01p+1}{p\left(0{,}04p-1\right)}$$

имеет один полюс $p=25\ \text{с}^{-1}$ в правой полуплоскости. Примем $K=40$. Тогда АФЧХ $W(j\omega)$ пересекает действительную ось левее критической точки (рис. 6.9). Длина дополняющей дуги бесконечно большого радиуса в угловых единицах равна $v\pi/2=\pi/2$.

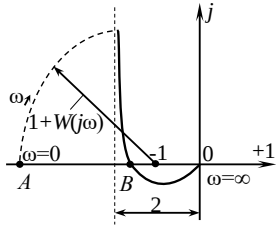


Рис. 6.9 АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы

В данном случае имеется половина отрицательного перехода $W(j\omega)$ в точке *A* и один положительный переход в точке *B*. Разность между числами переходов равна $1/2$, что равно $v/2$, так как $v=1$. Условия критерия выполнены, значит система в замкнутом состоянии устойчива.

Пример 6.2

На рис. 6.10 дана АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы с астатизмом второго порядка, т.е. $v=2$. Дуга бесконечно большого радиуса, дополняющая АФЧХ $W(j\omega)$, при втором порядке астатизма соответствует углу $v\pi/2=2\pi/2$. Пусть система в разомкнутом виде устойчива (не имеет корней в правой полуплоскости). Тогда система в замкнутом состоянии будет неустойчивой, поскольку АФЧХ $W(j\omega)$ охватывает критическую точку.

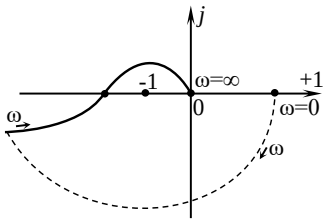


Рис. 6.10 АФЧХ разомкнутой системы с астатизмом второго порядка

6.4 Запасы устойчивости по фазе и модулю

Устойчивость является необходимым условием нормального функционирования любой системы. Важно, чтобы система сохраняла устойчивость в процессе эксплуатации и тогда, когда по тем или иным причинам параметры системы меняются в определенных пределах. Это возможно, если система работает не на

грани устойчивости, а в достаточном удалении от нее, т.е. система должна обладать некоторым запасом устойчивости, обеспечивающим ее работоспособность в изменяющихся условиях эксплуатации.

Поскольку устойчивость замкнутой системы оценивается критерием Найквиста по расположению АФЧХ $W(j\omega)$ разомкнутой системы, то в качестве меры устойчивости замкнутой системы можно использовать расстояние между годографом $W(j\omega)$ и критической точкой (-1, *j*0). Так как положение годографа $W(j\omega)$ на комплексной плоскости характеризуется фазой и модулем, различают запасы устойчивости по фазе и по модулю.

Запас устойчивости по фазе (рис. 6.11) характеризует удаление АФЧХ $W(j\omega)$ по дуге окружности единичного радиуса от критической точки и определяется углом γ между отрицательной частью действительной оси и лучом, проведенным через начало координат и точкой пересечения годографа $W(j\omega)$ с окружностью единичного радиуса. При изменении параметров систем таким образом, чтобы АФЧХ приближалась к критической точке, система с меньшим запасом устойчивости по фазе γ_1 (рис. 6.11, *а*) потеряет устойчивость при меньшей величине изменения параметров по сравнению с системой, имеющей больший запас устойчивости по фазе γ_2.

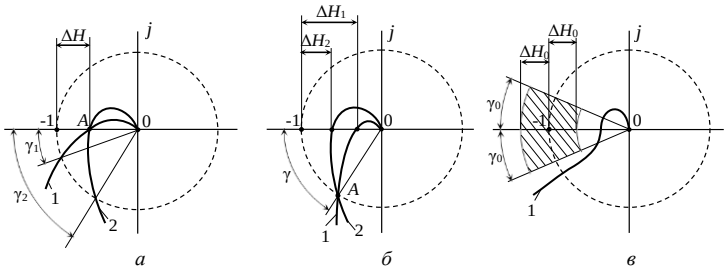


Рис. 6.11 АФЧХ систем с различными запасами устойчивости

Запас устойчивости по модулю характеризует удаление

АФЧХ от критической точки вдоль действительной оси. Величины ΔH_1 и ΔH_2 (рис. 6.11, *б*) являются мерой оценки запаса устойчивости по модулю. Хотя системы, обладающие АФЧХ 1 и 2, и имеют одинаковый запас устойчивости по углу γ, но система 2 имеет меньший запас устойчивости, чем система 1, поскольку $\Delta H_2 < \Delta H_1$. Это означает, что коэффициент усиления системы 2 должен получить изменение меньшее, чем в случае системы 1, чтобы АФЧХ системы 2 прошла через критическую точку и система оказалась на границе устойчивости.

Таким образом, для обеспечения запаса устойчивости системы при изменении ее параметров в установленных пределах, необходимо, чтобы АФЧХ разомкнутой системы (кривая 1 на рис. 6.11, *в*) не заходила в запретную зону, определенную установленными запасами устойчивости по фазе γ_0 и модулю ΔH_0.

ГЛАВА 7

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

7.1 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА ПО ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Произвольный сигнал $u(t)$ можно разложить в обобщенный ряд Фурье по любому полному базису $\{\varphi_n(t)\}$, если интервал определения сигнала совпадает с интервалом ортогональности базисных функций $\varphi_n(t)$.

Бесконечная система действительных функций

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots \tag{7.1}$$

называется ортогональной на отрезке $[t_1, t_2]$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0, \quad n \neq m.$$

При этом должно выполняться соотношение

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt \neq 0,$$

т.е. ни одна из функций в системе (7.1) не равна тождественно нулю.

Величина

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt} \tag{7.2}$$

называется нормой функций $\varphi_n(t)$.

Функции $\varphi_n(t)$, для которых справедливо условие

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt = 1,$$

называются нормированными. Система нормированных функций $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$, в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, называется ортонормированной.

Известно, что если функции $\varphi_n(t)$ непрерывны, то произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_1}^{t_2} |u(t)|^2 \, dt < \infty$$

может быть представлена в виде суммы ряда

$$u(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) + \cdots \tag{7.3}$$

Для определения коэффициентов c_n умножим обе части уравнения (7.3) на $\varphi_n(t)$ и проинтегрируем в пределах от t_1 до t_2. Учитывая, что все слагаемые вида

$$c_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt$$

при $m \neq n$ обращаются в нуль в силу ортогональности функций $\varphi_m(t)$ и $\varphi_n(t)$, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)\varphi_n(t)dt = c_n \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt = c_n \|\varphi_n\|^2 .$$

Отсюда следует соотношение для коэффициентов c_n:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_n(t)dt . \tag{7.4}$$

Ряд (7.3), в котором коэффициенты c_n определены по формуле (7.4), называется *обобщенным рядом Фурье* по заданному базису функций $\varphi_n(t)$.

При заданном базисе функций $\varphi_n(t)$ и фиксированном числе слагаемых ряда (7.3) обобщенный ряд Фурье обеспечивает оптимальную (в смысле минимума квадратической ошибки) аппроксимацию функции $u(t)$. Это означает, что среднеквадратическая ошибка

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \left[u(t) - \sum_{n=0}^{N} c_n\varphi_n(t) \right]^2 dt \xrightarrow{c_n} E_{\min} \geq 0 \tag{7.5}$$

достигает минимума, если c_n вычисляется по формуле (7.4). Поскольку

$$\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt = \|u\|^2 ,$$

то из (7.5) следует неравенство

$$\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \le \|u\|^2 .$$

Оно справедливо для любой ортогональной системы и носит название *неравенства Бесселя*.

7.2 Спектральные представления непрерывных сигналов

В силу ряда преимуществ гармонические функции занимают особое место в базисе ортогональных функций, используемых при представлении сигналов. В частности, гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований, осуществляемых линейными системами. Это значит, что если на входе линейной системы действуют гармонические колебания, то сигнал на выходе также остается гармоническим, отличаясь от входного лишь амплитудой и фазой. Это свойство линейных систем делает представление сигналов через синусоиды и комплексные экспоненты весьма полезным способом их описания.

Сигнал любой сложности может быть представлен в виде суммы (в общем случае бесконечной) гармонических сигналов. Говорят, что осуществлено *спектральное разложение* сигнала, если сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами. Совокупность отдельных гармонических компонент сигнала образует его *спектр*.

7.2.1 Спектр периодических сигналов

Периодические непрерывные сигналы обычно представляют в виде *ряда Фурье*:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t \right) \tag{7.6}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – частота основной гармоники, соответствующая периоду T повторения сигнала $u(t)$. Частоты $k\omega_1$ называются гармониками; k – номер гармоники. Коэффициенты ряда (7.6) вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t-T}^{t} u(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t-T}^{t} u(\tau) \sin k\omega_1 \tau d\tau, \quad k = \overline{0, \infty}$$

Постоянное слагаемое в (7.6) представляет собой среднее значение сигнала на периоде

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau .$$

Если сигнал $u(t)$ является четной функцией, то все коэффициенты b_k будут равны нулю и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только косинусные слагаемые. Если $u(t)$ функция нечетная, то равны нулю будут коэффициенты a_k и в формуле останутся лишь синусные слагаемые. Используя формулы тригонометрических преобразований, ряд (7.6) можно записать в более компактной форме в виде синусоидальной функции той же частоты с амплитудой U_k и начальной фазой φ_k

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin\left(k\omega_1 t + \varphi_k \right) . \tag{7.7}$$

Таким образом, ряд Фурье представляет собой разложение периодического сигнала $u(t)$ по системе ортогональных функций

$$\varphi_n(t) = \left\{ \sin n\omega_1 t; \cos n\omega_1 t \right\} .$$

Квадрат нормы этих функций согласно (7.2)

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t-T}^{t} \begin{Bmatrix} \sin^2 n\omega_1\tau \\ \cos^2 n\omega_1\tau \end{Bmatrix} d\tau = \frac{T}{2}.$$

При анализе электротехнических сигналов часто используется комплексная форма записи ряда Фурье. Она получается из вещественной формы (7.6) на основе формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j\sin x$.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_1 t} \tag{7.8}$$

Комплексные коэффициенты

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} u(\tau)e^{-jk\omega_1\tau}d\tau \tag{7.9}$$

ряда связаны с коэффициентами ряда (7.6), следующим соотношением:

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2}\left(a_k - jb_k\right).$$

Простой является связь коэффициентов $\underline{c}_k$ с амплитудами U_k и фазами φ_k формы (7.7)

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2}U_k e^{j\varphi_k},\ U_k = 2\left|\underline{c}_k\right|,\ \varphi_k = \arg\left(\underline{c}_k\right).$$

В соответствии с (7.8) представление вещественного сигнала содержит слагаемые отрицательной частоты, при этом $\underline{c}_{-k} = \overset{*}{\underline{c}}_k$. Отрицательная частота – понятие не физическое, а математическое, вытекающее из способа представления комплексных чисел.

Таким образом, периодический сигнал раскладывается на отдельные составляющие частот, кратных частоте основной гармоники. Амплитуду отдельных составляющих сигнала (*спектр амплитуд*) можно вычислить как

$$U\left(k\omega_1\right) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

а фазы (*спектр фаз*) – по выражению

$$\varphi\left(k\omega_1\right) = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}.$$

Спектр периодического непрерывного сигнала дискретен.

Минимальное расстояние между частотами спектра равно величине ω_1 частоты основной гармоники.

7.2.2 Спектр непериодического сигнала

Непериодические непрерывные сигналы не могут быть представлены в виде ряда Фурье. Для их описания используется преобразование Фурье, получаемое как предельный переход от ряда Фурье при $T \to \infty$. Частота при этом перестает быть дискретно меняющейся и становится непрерывным параметром преобразования. Формула (7.9) трансформируется в формулу *прямого преобразования Фурье*

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (7.10)$$

Непрерывный спектр (7.10) сигнала называют также *спектральной плотностью*. Спектральная плотность – комплексная функция частоты, несущая информацию об амплитуде и фазе гармонических составляющих. Спектр амплитуд определяется как модуль спектральной плотности

$$U(\omega) = \left|U(j\omega)\right|,$$

а спектр фаз – как аргумент

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\left[U(j\omega)\right]}{\operatorname{Re}\left[U(j\omega)\right]}.$$

Рассматривая сигнал как вещественную функцию, можно показать, что амплитудный спектр является четной, а фазовый спектр – нечетной функцией частоты

$$\left|U(-j\omega)\right| = \left|U(j\omega)\right|, \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

Преобразование Фурье является взаимнооднозначным, поэтому представление сигнала в частотной области (спектральная функция) содержит столько же информации, сколько и исходный сигнал, заданный во временной области. Чтобы найти сигнал по его спектральной плотности используют *обратное преобразование Фурье*

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая преобразования Лапласа с преобразованиями Фурье, приходим к выводу, что преобразования Фурье могут быть получены из преобразований Лапласа посредством замены $p = j\omega$.

Пример 7.1 *Найти спектральную функцию сигнала* $u(t) = e^{-\alpha t}$.

По Лапласу

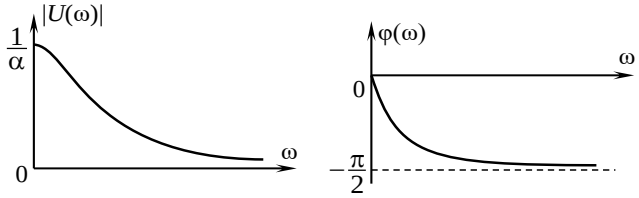
$$U(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+p)t} dt = -\left.\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{\alpha+p}\right|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{p+\alpha}.$$

Спектральную плотность определим путем замены $p = j\omega$

$$\underline{U}(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

На рис. 7.1 приведены модуль и фаза спектральной плотности экспоненциального сигнала.



а *б*

Рис. 7.1 Модуль (а) и фаза (б) спектральной плотности экспоненциального сигнала

7.3 Некоторые важные свойства ряда Фурье

1. *Равенство Ляпунова*. Если существует интеграл от $u^2(t)$, то

$$\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} u^2(t)dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Другими словами, квадрат действующего значения электрической величины $u(t)$ равен сумме квадратов действующих значений гармоник, т.е. средняя мощность сигнала определяется

суммой мощностей отдельных компонент амплитудного спектра. В случае непериодического сигнала энергия в спектре сигнала определяется равенством Парсеваля

$$\int_0^\infty u^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left|U(j\omega)\right|^2 d\omega .$$

2. *Теорема о коэффициентах ряда при* $k \to \infty$. Коэффициенты ряда Фурье a_k и b_k для любой непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $\left[t-T,\ t\right]$ функции $u(t)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0 .$$

Важное свойство ряда, означающее, что с ростом номера гармоники ее амплитуда уменьшается. Это позволяет оценивать значимость высших гармонических составляющих ряда.

3. *Сходимость ряда*. Если функция $u(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд сходится в этом интервале; сумма ряда равна $u(t)$ в точках, где функция $u(t)$ непрерывна, и равна

$$\frac{u(t+0)+u(t-0)}{2}$$

в каждой точке разрыва $\big(u(t+0)$ и $u(t-0)$ являются пределами справа и слева от $u(t)\big)$.

ГЛАВА 8

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

8.1 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

8.1.1 Линеаризация с помощью ряда Тейлора

Нелинейной называется система, среди элементов которой есть хотя бы один с нелинейной зависимостью между его выходным и входным сигналами.

При анализе нелинейной системы ее по возможности представляют состоящей из линейной (ЛЧ) и нелинейной (НЧ) частей (рис. 8.1). Это упрощает составление уравнений системы и их анализ.

В установившемся состоянии зависимость выходной величины $u_1(t)$ нелинейной части системы от входной $u_0(t)$ определяется *статической* характеристикой. Из-за нелинейности статических характеристик уравнения систем в большинстве случаев получаются нелинейными. Для упрощения анализа таких систем нелинейные уравнения приближенно заменяют линейными, если, конечно, такое возможно. Решения этих уравнений с достаточной для инженерной практики точностью совпадают с решениями нелинейных уравнений. Такая замена уравнений называется *линеаризацией*. Обычно линеаризация нелинейного уравнения производится относительно некоторого установившегося состояния элемента системы. Линеаризация уравнения сводится к замене нелинейной характеристики $u_1 = \varphi(u_0)$ на линейную: $u_1 = au_0 + b$, где a и b – постоянные. Аналитически эта замена приводит к использованию линейной части разложения в ряд Тейлора функции $u_1 = \varphi(u_0)$ в окрестности точки

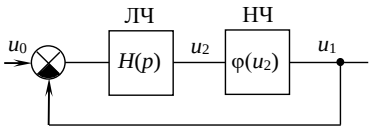


Рис. 8.1 Нелинейная система: ЛЧ и НЧ – линейная и нелинейная части

установившегося режима, т.е. члены ряда Тейлора, содержащие отклонения Δu_1 в степени выше первой отбрасываются. Геометрически это означает, что кривая $u_1 = \varphi(u_0)$ заменяется на касательную, проведенную через точку установившегося режима (координаты u_{10} и u_{00}) (рис. 8.2).

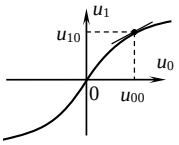


Рис. 8.2

Часто нелинейные характеристики заменяются кусочно-линейными (кусочно-линейная аппроксимация) (рис. 8.3).

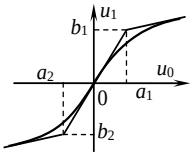


Рис. 8.3

Нелинейные характеристики, линеаризуемые указанными способами в требуемом диапазоне изменения входной величины, называются *несущественно нелинейными*.

Иные характеристики, не поддающиеся такой линеаризации, называются *существенно нелинейными* (рис. 8.4).

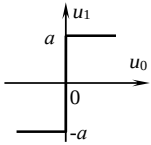


Рис. 8.4

Покажем методику линеаризации уравнения системы с помощью ряда Тейлора. Пусть поведение элемента системы описывается нелинейным уравнением

$$au_1' + bu_1^2 = f(u_0). \tag{8.1}$$

Предположим, что u_{10} – значение выходной величины в установившемся режиме. Тогда u_1 можно записать в следующем виде: $u_1 = u_{10} + \Delta u_1$, где Δu_1 – отклонение координаты u_1 от установившегося режима.

Разложим нелинейный член в ряд Тейлора относительно точки u_{10}

$$bu_1^2 \approx b\left(u_{10}^2 + \frac{2u_{10}}{1!}\Delta u_1\right) = b\left(u_{10}^2 + 2u_{10}\Delta u_1\right).$$

Уравнение (8.1) преобразится

$$au_{10}' + a\Delta u_1' + bu_{10}^2 + 2bu_{10}\Delta u_1 = f(u_{00} + \Delta u_0).$$

Учитывая, что $au_{10}' + bu_{10}^2 = f(u_{00})$, получим уравнение для приращений

$$a\Delta u_1' + c\Delta u_1 = \varphi(u_0)\,, \tag{8.2}$$

где $c = 2bu_{10}$, $\varphi(u_0) = f(\Delta u_0)$.

Уравнение (8.2) линейное и решается обычными методами.

8.1.2 Метод гармонической линеаризации

Метод используется для определения периодических режимов в нелинейных системах. Наличие в системе одного или нескольких нелинейных звеньев при определенных условиях приводит к появлению в системе предельных циклов. Амплитуда и частота этих колебаний могут быть приближенно определены путем гармонической линеаризации нелинейности.

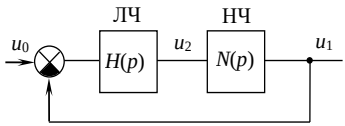


Рис. 8.5 Линеаризованная система

Как уже отмечалось, в исследуемой системе можно условно выделить линейную (ЛЧ) и нелинейную (НЧ) части (рис. 8.5) независимо от числа нелинейных элементов.

Пусть $u_0(t) \equiv 0$. Предположим, что в системе возникло периодическое колебание с частотой ω. Тогда на выходе НЧ, имеющей характеристику

$$u_1 = \varphi(u_2)\,, \tag{8.3}$$

также возникнет периодический сигнал

$$u_1 = \varphi(u_2) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(r_k \sin k\omega t + q_k \cos k\omega t\right). \tag{8.4}$$

Как правило, характеристика НЧ симметрична относительно начала координат, вследствие чего постоянная составляющая $U_0 \equiv 0$. Сигнал с выхода НЧ поступает на ее вход через обратную связь и ЛЧ. Поскольку реальные системы обладают инерцией, то во многих случаях ЛЧ обладает свойствами фильтров низких частот, т.е. $H(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ и ЛЧ не пропускает высшие гармонические

$$u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} H(k\omega)\left[r_k \sin\left(k\omega t + \psi_k\right) + q_k \cos\left(k\omega t + \psi_k\right)\right] \approx$$
$$\approx H(\omega)\left[r_1 \sin\left(\omega t + \psi_1\right) + q_1 \cos\left(\omega t + \psi_1\right)\right] = A\sin\omega t. \tag{8.5}$$

Здесь ψ_k – фазовый сдвиг, вносимый ЛЧ на частоте $k\omega$.

Сравнивая (8.4) и (8.5), приходим к выводу, что в возбуждении колебаний с частотой ω и поддерживании их принимает участие лишь первая (основная) гармоника сигнала на выходе НЧ, в связи с чем работу всей нелинейной системы в этом режиме можно рассматривать на первой гармонике. Тогда согласно (8.3) и (8.5)

$$u_1 = \varphi\left(u_2\right) = \varphi\left(A\sin\omega t\right) = a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t\ ,$$

где
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{t-T}^{t} \varphi\left(A\sin\omega t\right)\sin\omega t\ dt\ ,$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{t-T}^{t} \varphi\left(A\sin\omega t\right)\cos\omega t\ dt\ .$$

Учитывая (8.5), можно записать, что

$$\sin\omega t = \frac{u_2}{A}\ ,\ \cos\omega t = \frac{1}{\omega A}\frac{du_2}{dt}\ .$$

Тогда

$$u_1 = a_1 \frac{u_2}{A} + b_1 \frac{1}{\omega A}\frac{du_2}{dt}\ .$$

Введем новые обозначения

$$q\left(A,\omega\right) = \frac{a_1}{A} = \frac{2}{AT}\int_{t-T}^{t} \varphi\left(A\sin\omega t\right)\sin\omega t\ dt, \tag{8.6}$$

$$q'\left(A,\omega\right) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{AT}\int_{t-T}^{t} \varphi\left(A\sin\omega t\right)\cos\omega t\ dt. \tag{8.7}$$

Тогда уравнение типа "вход-выход" для нелинейной части будет следующим:

$$u_1 = q\left(A,\omega\right)u_2 + \frac{q'\left(A,\omega\right)}{\omega}\frac{du_2}{dt}. \tag{8.8}$$

Преобразуя (8.8) по Лапласу

$$U_1(p) = q(A,\omega)U_2(p) + \frac{q'(A,\omega)}{\omega} pU_2(p),$$

получим передаточную функцию линеаризованной НЧ

$$N(p) = q(A,\omega) + \frac{p}{\omega} q'(A,\omega). \qquad (8.9)$$

Коэффициенты $q(A,\omega)$ и $q'(A,\omega)$ называют *коэффициентами гармонической линеаризации*. Характер гармонической линеаризации определяется видом характеристики нелинейной части. Если её статическая характеристика имеет петлю гистерези са (рис. 8.6), то в (8.9) вычисляются оба коэффициента $q(A,\omega)$ и $q'(A,\omega)$. Если же характеристика не имеет петлю, то

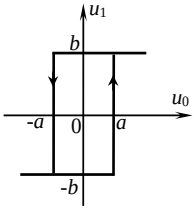


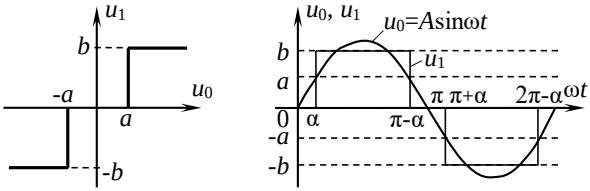
Рис. 8.6

$$q'(A,\omega) \equiv 0. \qquad (8.10)$$

В этом случае

$$N(p) = q(A,\omega).$$

Пример 8.1 *Определить коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейного звена релейного типа (*рис. 8.7,*а).*



а *б*

Рис. 8.7 Характеристика нелинейной части (а) и сигнал на ее выходе (б)

Используя характеристику нелинейной части, построим сигнал на выходе системы (рис. 8.7, *б*). Для определения коэффициентов гармонической линеаризации воспользуемся формулами (8.6) и (8.7)

$$q(A,\omega) = \frac{2}{\omega TA}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} b\sin\omega t\, d\omega t + \frac{2}{\omega TA}\int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} -b\sin\omega t\, d\omega t = \frac{2b}{\pi A}\cos\alpha + \frac{2b}{\pi A}\cos\alpha = \frac{4b}{\pi A}\cos\alpha,$$

где $\alpha = \arcsin\dfrac{a}{A}$.

Поскольку

$$\cos\alpha = \cos\left(\arcsin\frac{a}{A}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2},$$

то

$$q(A,\omega) = q(A) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}.$$

Из (8.7) следует

$$q'(A,\omega) = \frac{2}{\omega TA}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} b\cos\omega t\, d\omega t + \frac{2}{\omega TA}\int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} -b\cos\omega t\, d\omega t = 0.$$

Последнее подтверждает правило (8.10).

Таким образом, гармонически линеаризованное уравнение нелинейной части будет следующим:

$$u_1 = u_0\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad (A \ge a).$$

8.2 Определение частоты автоколебаний нелинейной замкнутой системы с помощью метода гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации относится к приближенным методам исследования автоколебаний. Сама методика поиска автоколебаний заключается в следующем.

Вначале определяется передаточная функция линеаризованной нелинейной системы в разомкнутом состоянии. Как следует из рис. 8.5, она выглядит так

$$W(A,p) = H(p)N(A,p). \tag{8.11}$$

Амплитудно-фазочастотная характеристика линеаризованной системы в разомкнутом состоянии получается после подстановки $p = j\omega$ в (8.11)

$$\underline{W}(A,j\omega) = \underline{H}(j\omega)\underline{N}(A,j\omega) = \underline{H}(j\omega)\left[q(A,j\omega) + jq'(A,j\omega)\right]. \tag{8.12}$$

По критерию Найквиста незатухающие синусоидальные колебания в замкнутой системе возникают, если АФЧХ проходит через точку (-1, j 0). Это означает, что $\underline{W}(A_0, j\omega_0) = -1$, где A_0 и

ω_0 амплитуда и частота колебаний. Тогда из (8.12) следует, что условием автоколебаний является равенство

$$H(j\omega) = -\frac{1}{q(A_0, j\omega_0) + jq'(A_0, j\omega_0)}. \qquad (8.13)$$

Решение уравнения (8.13) относительно A_0 и ω_0 дает искомые амплитуду и частоту автоколебаний. Если коэффициенты гармонической линеаризации не зависят от частоты (в практике это случается часто), то частоту ω_0 и амплитуду A_0 можно найти путем решения уравнения (8.13) или графически (рис. 8.8)

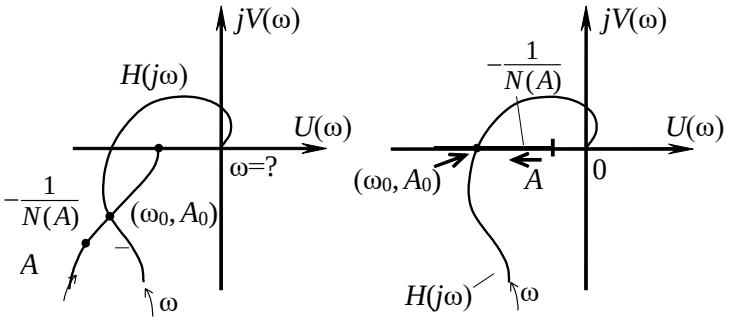


Рис. 8.8 Определение частоты и амплитуды сигнала режима автоколебаний системы: а – с нелинейностью, имеющей гистерезисную петлю; б – с однозначной нелинейностью $\left(N(p) = q(A, p)\right)$

8.3 Определение устойчивости автоколебаний

В нелинейной системе и при отсутствии внешнего воздействия могут существовать как устойчивые, так и неустойчивые предельные циклы (периодические колебания). Устойчивые циклы называются автоколебаниями. Параметры автоколебаний (A_0, ω_0) не зависят от начальных условий. Найденные неустойчивые предельные циклы в большинстве случаев характеризуют границу устойчивости автоматической системы в малом (т.е. при малых возмущающих входных величинах).

Рассмотрим два способа приближенного исследования

устойчивости нелинейных систем, основанных на идее гармонического анализа.

А. Метод, основанный на использовании годографа Михайлова

Пусть известна передаточная функция замкнутой нелинейной системы, представленная в виде

$$W(A,p)=\frac{B(A,p)}{D(A,p)},$$

где $D(A,p)$, как известно, представляет собой характеристический многочлен системы.

Зная $D(A,p)$, можно составить комплексный характеристический многочлен

$$\underline{D}(j\omega)=U(A,\omega)+jV(A,\omega).$$

Предположим, что в нелинейной системе существует предельный цикл с параметрами $A=a_0$, $\omega=\omega_0$. Тогда годограф $\underline{D}(A,j\omega)$ проходит через точку начала координат (рис. 8.9), причем для всей кривой $A=a_0$, а частота $\omega=\omega_0$ лишь в начале координат.

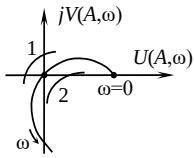


Рис. 8.9

Дадим амплитуде предельного цикла приращение Δa, т.е. положим $A=a_0+\Delta a$. Тогда положение годографа $\underline{D}(A,j\omega)$ изменится (на рис. 8.9) новые положения годографа $\underline{D}(A,j\omega)$ показаны только в окрестности начала координат). При изменении A возможны две альтернативы.

1. Пусть при $\Delta a>0$ годограф $\underline{D}(A,j\omega)$ занимает положение 1, а при $\Delta a<0$ – положение 2. Тогда в соответствии с критерием Михайлова система при $\Delta a>0$ будет устойчивой, а при $\Delta a<0$ – неустойчивой. Это означает, что амплитуда колебаний в первом случае уменьшается, а во втором случае – увеличивается до a_0. В обоих случаях приращения Δa стремятся к нулю, т.е. автоколебания устойчивы.

2. Если же кривая $\underline{D}(A, j\omega)$ занимает положение 1 при $\Delta a < 0$, а положение 2 при $\Delta a > 0$, то в первом случае амплитуда колебаний уменьшается до нуля, а во втором случае увеличивается до бесконечности, т.е. найденный предельный цикл является неустойчивым.

Исходя из вышеизложенного, выводится и аналитический критерий устойчивости нелинейной системы. Он дается следующим неравенством:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_{\text{п}}\left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_{\text{п}} - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_{\text{п}}\left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)_{\text{п}} > 0, \qquad (8.14)$$

где индекс "п" означает, что производные вычисляются при значениях $A = a_0$, $\omega = \omega_0$.

Для определения устойчивости, таким образом, нужно проверить, чтобы выполнялось условие (8.14) и ход кривой $\underline{D}(A, j\omega)$ следовал критерию Михайлова.

Б. Метод, основанный на критерии Найквиста

Для того чтобы предельный цикл с амплитудой A_0 и частотой ω_0 был устойчивым, нужно, чтобы изображающая точка при перемещении по кривой $\left(-\frac{1}{N(A)}\right)$ в направлении возрастания A подходила к точке пересечения кривых $\underline{H}(j\omega)$ и $\left(-\frac{1}{N(A)}\right)$ изнутри АФЧХ $\underline{H}(j\omega)$.

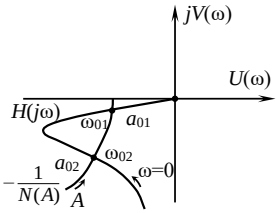


Рис. 8.10

На рис. 8.10 устойчивому предельному циклу соответствует точка (a_{01}, ω_{01}); предельный цикл (a_{02}, ω_{02}) неустойчив: при увеличении A он переходит в предельный цикл с параметрами a_{01}, ω_{01}, а при уменьшении A амплитуда колебаний стремится к нулю.

ГЛАВА 9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

9.1 РЕШЁТЧАТЫЕ ФУНКЦИИ

Решетчатыми называются функции, определенные в дискретные моменты времени $t_n = nT$, где $n \geq 0$ – целое число, а T – период дискретности. Значения функции между значениями дискретного переменного t_n не определены (рис. 9.1).

Пусть задана некоторая функция $u(t)$ непрерывного аргумента t (рис. 9.2). Ординаты этой функции, соответствующие равноотстоящим дискретным значениям $t_n = nT$, образуют решетчатую функцию $u(n)$. Эти ординаты будем называть *дискретами*. Для того чтобы получить решетчатую функцию по заданной непрерывной функции $u(t)$, нужно в последней заменить t на $t_n = nT$. Так, например, непрерывной функции

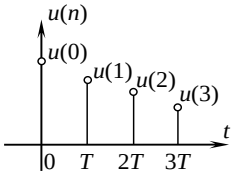


Рис. 9.1

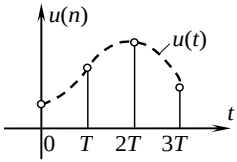


Рис. 9.2

$$u(t) = e^{-\alpha t}$$

соответствует решетчатая функция

$$u(n) = e^{-\alpha nT}.$$

Дискреты $u(t)$ могут быть определены для смещенных моментов времени $t = nT + \Delta T$ или $t = (n+\varepsilon)T$, где $\varepsilon = \Delta T / T \leq 1$. Такие функции называются *смещенными решетчатыми* и обозначаются как $u(n, \varepsilon)$.

Мы будем предполагать, что $\varepsilon \geq 0$, $n \geq 0$. Это означает, что решетчатая функция $u(n, \varepsilon)$ сдвинута вправо на $\Delta T = \varepsilon T$ относительно $u(n) = u(n, 0)$ (рис. 9.3, *б*). В случае непрерывной

функции $u(t)$ функция $u(n,\varepsilon)$ является непрерывной по аргументу ε и удовлетворяет условию

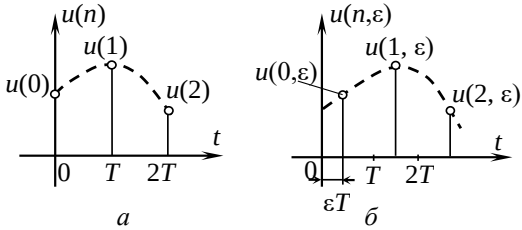


Рис. 9.3

$$u(n-1,\ 1)=u(n,\ 0). \tag{9.1}$$

Если функция $u(t)$ терпит разрыв первого рода в точках $t=nT$, то равенство (9.1) не выполняется, поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 1} u(n-1,\ \varepsilon)\neq \lim_{\varepsilon\to 0} u(n,\ \varepsilon)\ .$$

В этом случае за значение $u(n)$ будем принимать предел справа

$$u(nT)=\lim_{\varepsilon\to 0+} u(nT+\varepsilon T)\ .$$

Поэтому значение переменного ε рассматривается в полуинтервале $0\le\varepsilon<1$.

Одной и той же решетчатой функции может соответствовать бесчисленное множество непрерывных функций, ординаты которых в дискретные моменты времени t_n будут совпадать с $u(n)$. Эти функции называются *огибающими*.

9.2 Конечные разности

Выражение

$$\Delta u(n)=u(n+1)-u(n) \tag{9.2}$$

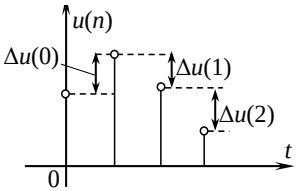


Рис. 9.4

называется *конечной разностью* первого порядка (первой разностью) и характеризует скорость изменения решетчатой функции, т.е. является аналогом производной функции непрерывной переменной t (рис. 9.4).

Разность второго порядка (вторая разность)

$$\Delta^2 u(n) = \Delta u(n+1) - \Delta u(n)$$

или после подстановки (9.2)

$$\begin{aligned}\Delta^2 u(n) &= \left[u(n+2) - u(n+1)\right] - \left[u(n+1) - u(n)\right] = \\ &= u(n+2) - 2u(n+1) + u(n)\,.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Разность k-го порядка (k-ая разность) определяется рекуррентно

$$\Delta^k u(n) = \Delta^{k-1} u(n+1) - \Delta^{k-1} u(n)\,.$$

Пример 9.1

Для решетчатой функции $u(n) = e^{-\alpha n}$ первая разность

$$\Delta u(n) = e^{-\alpha(n+1)} - e^{(n)} = e^{-\alpha n}(e^{-\alpha} - 1)\,.$$

Вторая разность согласно (9.3)

$$\begin{aligned}\Delta^2 u(n) &= e^{-\alpha(n+2)} - 2e^{-\alpha(n+1)} + e^{\alpha n} = \\ &= e^{-\alpha n}(e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} + 1) = e^{-\alpha n}(e^{-\alpha} - 1)^2.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta^k u(n) = (e^{-\alpha} - 1)^k e^{-\alpha n}\,.$$

9.3 Разностные уравнения

Соотношение между решетчатой функцией $u(n)$ и ее разностями $\Delta^k u(n)$, $\left(k = \overline{1, m}\right)$ называется *разностным уравнением* (уравнением в конечных разностях).

Если это соотношение линейно, то уравнение называется линейным. Оно может быть представлено в следующей форме:

$$b_m \Delta^m u(n) + b_{m-1} \Delta^{m-1} u(n) + \cdots + b_0 u(n) = f(n)\,. \tag{9.4}$$

Здесь $f(n)$ – правая часть, она известна и определяется входным воздействием, $u(n)$ – искомая функция. Заменяя разности значениями решетчатой функции, получим

$$a_m u(n+m) + a_{m-1} u\left(n+m-1\right) + \cdots + a_0 u(n) = f(n)\,. \tag{9.5}$$

Это уравнение является разностным уравнением m-го порядка.

Разностные уравнения (9.4) и (9.5) с правыми частями,

называются *неоднородными*, если же $f(n) \equiv 0$ то – *однородными*.

Классический метод решения разностных уравнений во многом аналогичен классическому методу решения дифференциальных уравнений. При этом начальные условия задаются в виде значений решетчатой функции $u(n)$ при

$$n = \overline{0,\ m-1}.$$

Пример 9.2 *Определить комплекс действующего значения тока на выходе n -го четырехполюсника цепочечной схемы (рис. 9.5), если* $u_0 = U_{m0}\sin\omega t$.

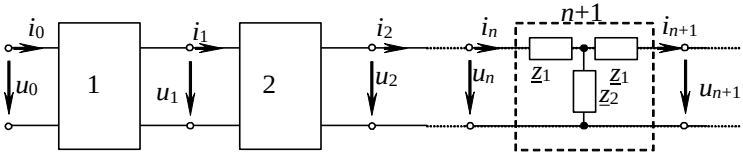


Рис. 9.5

Комплексы напряжений и токов $\underline{U}_n$ и $\underline{I}_n$ можно рассматривать как решетчатые функции

$$\underline{U}_n = \underline{U}(n),\ \ \underline{I}_n = \underline{I}(n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &-\underline{U}(n) + \underline{I}(n)\left(\underline{z}_1 + \underline{z}_2\right) - \underline{I}(n+1)\underline{z}_2 = 0, \\ &-\underline{U}(n+1) + \underline{I}(n)\underline{z}_2 - \underline{I}(n+1)\left(\underline{z}_1 + \underline{z}_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Исключим напряжение из уравнений (9.6), сдвинув первое вправо, т.е. полагая $n+1$ вместо n. Тогда

$$\underline{I}(n+2)\underline{z}_2 - 2\underline{I}(n+1)\left(\underline{z}_1 + \underline{z}_2\right) + \underline{I}(n)\underline{z}_2 = 0.$$

На основе анализа последнего уравнения видно, что комплекс действующего значения тока на выходе $n+2$ – го четырехполюсника определяется через комплексы токов n – го и $n+1$ – го четырехполюсников.

9.4 Классический метод решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение

$$a_m u_1(n+m) + a_{m-1}u_1(n+m-1) + \cdots + u_1(n) = f(n). \tag{9.7}$$

Его решение состоит из двух частей: общего решения

$u_{1\text{св}}(n)$ однородного уравнения

$$a_m u_1(n+m) + a_{m-1} u_1(n+m-1) + \cdots + a_0 u_1(n) = 0 \tag{9.8}$$

и частного решения $u_{1\text{пр}}(n)$ неоднородного уравнения (9.7):

$$u_1(n) = u_{1\text{пр}}(n) + u_{1\text{св}}(n).$$

Их электротехнический смысл пояснен в п. 1.7

А. Общее решение однородного уравнения (свободная составляющая)

Как и в случае однородного дифференциального уравнения (п. 1.7.1), общее решение уравнения (9.8) включает в себя m частных решений $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, ..., $u_{1m}(n)$

$$u_{1\text{св}}(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_{1i}(n). \tag{9.9}$$

Коэффициенты c_i представляют собой произвольные постоянные, определяемые исходя из начальных условий. Вид частных решений зависит от корней характеристического уравнения

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

получаемого из (9.8) путем замены $u(n+i)$ на λ^i, $i = \overline{0, m}$.

1. *Корни характеристического уравнения простые и действительные*

В этом случае частные решения u_{1i} имеют вид:

$$u_{1i}(n) = \lambda_i^m,$$

а общее решение (9.9) запишется следующим образом:

$$u_{1\text{св}}(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^m.$$

Пример 9.3 *Найти вид свободной составляющей решения однородного уравнения* $u_1(n+2) + 8u_1(n+1) + 7 = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -7$.

Общее решение будет иметь вид

$$u_{1\text{св}}(n) = c_1(-1)^n + c_2(-7)^n .$$

2. *Корни комплексные сопряженные*

Пусть среди корней есть комплексные сопряженные корни $\underline{\lambda}_i = \alpha + j\omega$ и $\underline{\lambda}_{i+1} = \underline{\lambda}_i^* = \alpha - j\omega$. Тогда частные решения будут иметь следующие составляющие:

$$u_{1i}(n) = c_i \rho^n \sin\varphi n, \quad u_{1(i+1)}(n) = c_{i+1}\rho^n \cos\varphi n ,$$

а общее решение, соответствующее этим корням,

$$u_{1\text{св}}(n) = \rho^n (c_i \sin\varphi n + c_{i+1}\cos\varphi n) , \tag{9.10}$$

где $\rho = |\underline{\lambda}_i| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ – модуль; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha}$ – аргумент корня $\underline{\lambda}_i$; c_i и c_{i+1} – произвольные постоянные.

Пример 9.4 *Найти вид свободной составляющей решения однородного уравнения* $u_1(n+2) + 8u_1(n+1) + 20u_1(n) = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 8\lambda + 20 = 0 .$$

Корни $\underline{\lambda}_{1,2} = -4 \pm j2$. Согласно (9.10) общее решение уравнения будет следующим:

$$u_{1\text{св}}(n) = (20)^{\frac{n}{2}} \left\{ c_1 \sin\left[n \ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-2}\right)\right] + c_2 \cos\left[n \ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-2}\right)\right]\right\}.$$

3. *Корни кратные действительные*

Пусть корень λ_1 кратности $r_1 > 1$. В этом случае частными решениями будут r_1 решетчатых функций

$$u_{11}(n) = \lambda_1^n,\ u_{12}(n) = \lambda_1^n n, \ldots,\ u_{1r_1}(n) = \lambda_1^n n^{r_1 - 1} .$$

Общее решение, соответствующее корню λ_1 кратности r_1,

тогда будет следующим:

$$u_{1\text{св}}(n) = \lambda_1^n \sum_{i=0}^{r_1-1} c_i n^i \ , \tag{9.11}$$

где c_i – произвольные постоянные.

Пример 9.5 *Найти вид свободной составляющей решения однородного уравнения* $u_1(n+3) + 3u_1(n+2) + 3u_1(n+1) + u_1(n) = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

или

$$(\lambda + 1)^3 = 0 \ .$$

Корню $\lambda = -1$ кратности $r = 3$ соответствуют решения

$$u_{11}(n) = (-1)^n, \quad u_{12}(n) = (-1)^n n, \quad u_{13}(n) = (-1)^n n^2 \ .$$

Согласно (9.11)

$$u_{1\text{св}}(n) = (-1)^n \left(c_1 + nc_2 + n^2 c_3\right).$$

9.5 Дискретное преобразование Лапласа

Если функция $u(t)$ задана в виде последовательности значений $u(nT)$ $(n = \overline{0, \infty})$, измеренных через равные промежутки времени T, то по отношению к ней преобразование Лапласа неприменимо, поскольку не определены значения $u(t)$ в промежутках между дискретами $u(nT)$. Положим, что последовательность отсчетов $u(nT)$ получена в результате действия дельта-импульсов $\delta(t - nT)$, извлекающих из $u(t)$ в моменты времени $t = nT$ значения $u(nT)$ следующим образом:

$$u^*(t) = u(t)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT) \ .$$

Полученная таким образом функция называется *распределением*. Она определена везде в силу непрерывности $\delta(t - nT)$. Применив к ней преобразование Лапласа, получим

$$L\left\{u^*(t)\right\} = \int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t-nT)\right] e^{-pt}.$$

Поменяем местами операции интегрирования и суммирования

$$L\left\{u^*(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\int_0^\infty \delta(t-nT)\, e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-pnT}. \qquad (9.12)$$

Правая часть (9.12), обозначаемая обычно как

$$D\left\{u(nT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\, e^{-pnT}, \qquad (9.13)$$

получила название *дискретного преобразования Лапласа*. Кратко оно называется *D*-преобразованием

$$L\left\{u^*(t)\right\} = D\left\{u(nT)\right\}. \qquad (9.14)$$

Равенство (9.14) означает, что преобразование Лапласа может быть формально использовано при решении задач, связанных с возникновением последовательностей, но для этих целей более целесообразно применение *D*-преобразования, поскольку оно лаконичнее, чем преобразование Лапласа.

В теории автоматического управления *D*-преобразование решетчатой функции $u(nT)$ или, что то же самое, $u(n)$ записывают, как правило, в несколько ином виде

$$U\left(\underline{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)e^{-\underline{q}n}, \qquad (9.15)$$

где новое комплексное переменное

$$\underline{q} = pT.$$

Учитывая, что $p = \sigma + j\omega$, получаем

$$\underline{q} = (\sigma + j\omega)T = \sigma_* + j\omega_*,$$

где $\sigma_* = \sigma T; \quad \omega_* = \omega T$.

В случае смещенной решетчатой функции $u(n,\varepsilon)$ преобразование будет иметь следующий вид:

$$U\left(\underline{q}, \varepsilon\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n, \varepsilon)e^{-\underline{q}n}.$$

Пример 9.6 *Пусть* $u(n)=1(n)$ *(рис. 9.6).*
Изображение

$$U\left(\underline{q}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}1(n)e^{-\underline{q}n}=1+e^{-\underline{q}}+e^{-2\underline{q}}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\underline{q}}}=\frac{e^{\underline{q}}}{e^{\underline{q}}-1},$$

если $\mathrm{Re}\left(\underline{q}\right)>0$.

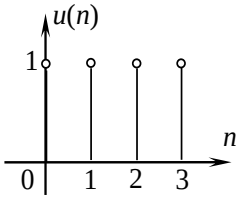


Рис. 9.6

Пример 9.7 *Пусть* $u(n,\varepsilon)=e^{-\alpha(n+\varepsilon)}$ *(рис. 9.7).*

$$U\left(\underline{q},\varepsilon\right)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha(n+\varepsilon)}e^{-\underline{q}n}=\sum_{n=o}^{\infty}e^{-\alpha\varepsilon}e^{-\left(\underline{q}+\alpha\right)n}=$$

$$=\frac{e^{-\alpha\varepsilon}}{1-e^{-\left(\underline{q}+\alpha\right)}}=\frac{e^{\underline{q}}e^{-\alpha\varepsilon}}{e^{\underline{q}}-e^{-\alpha}},$$

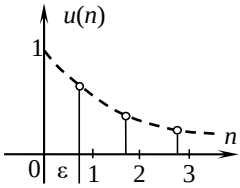


Рис. 9.7

Здесь сходимость обеспечивается, если $\mathrm{Re}\left(\underline{q}\right)>-\alpha$.

Пример 9.8 *Для функции* $u(n)=n!$ *изображение не существует, поскольку изображение* $D\{n!\}$ *сходится только в точке* $n=\infty$.

9.6 Область аналитичности изображения

По аналогии с определением, данным в случае обычного преобразования Лапласа, *оригиналом* будем называть решетчатую функцию $u(n)$, которая равна нулю при $n<0$ и удовлетворяет условию $u(n)<Me^{\sigma_0 n}$ при $n\geq 0$, где $M>0$ и $\sigma_0\geq 0$ – некоторые постоянные.

Существует *теорема*: для любого оригинала $u(n)$ изображение $U\left(\underline{q}\right)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\left\{\underline{q}\right\}>\sigma_c$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией (рис. 9.8). Величина σ_c называется абсциссой абсолютной сходимости.

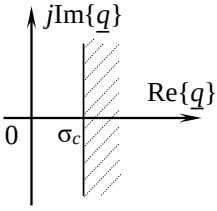


Рис. 9.8

9.7 Формула обращения

Обратное D-преобразование позволяет получить оригинал $u(n)$ по изображению $U\left(\underline{q}\right)$. Оно определяется соотношением

$$u(n)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\pi}^{c+j\pi}U\left(\underline{q}\right)e^{\underline{q}n}d\underline{q}\,,$$

где $n\geq 0$, $c>\sigma_c$, σ_c – абсцисса абсолютной сходимости.

В случае смещенной решетчатой функции

$$u(n,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\pi}^{c+j\pi}U\left(\underline{q},\varepsilon\right)e^{\underline{q}n}d\underline{q}\,. \tag{9.16}$$

Используя теорему о вычетах, можно преобразить соотношение (9.16)

$$u(n,\varepsilon)=\sum_{v=1}^{m}\mathrm{Res}\left\{U\left(\underline{q},\varepsilon\right)e^{\underline{q}(n-1)}\right\}_{\underline{q}=\underline{q}_v}\,, \tag{9.17}$$

где $\underline{q}_v$ – полюсы изображения $U\left(\underline{q},\varepsilon\right)$ $\left(v=\overline{1,m}\right)$.

Формула для определения вычетов в полюсе $\underline{q}_v$ кратности $r_v\geq 1$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Res}\left\{U\left(\underline{q},\varepsilon\right)e^{\underline{q}(n-1)}\right\}=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{\underline{q}\to\underline{q}_v}\frac{d^{r-1}}{d\left(e^{\underline{q}}\right)^{r-1}}\left\{U\left(\underline{q},\varepsilon\right)\left(e^{\underline{q}}-e^{\underline{q}_v}\right)^{r_v}e^{\underline{q}(n-1)}\right\}. \tag{9.18}$$

9.8 Периодичность изображения

Из определения D-преобразования следует, что функция $U\left(\underline{q}\right)$ периодическая вдоль мнимой оси плоскости $\underline{q}$ с периодом 2π.

Действительно,

$$U\left(\underline{q}+j2\pi k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)e^{-\left(\underline{q}+j2\pi k\right)n}=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)e^{-\underline{q}n}e^{-j2\pi kn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)e^{-\underline{q}n}=U\left(\underline{q}\right),$$

где k – любое целое число. Поэтому свойства изображения $U\left(\underline{q}\right)$ полностью определяются его поведением в полосе шириной 2π

$$\omega_{*0}<\mathrm{Im}\left\{\underline{q}\right\}\le\omega_{*0}+2\pi.$$

Наиболее удобна в рассмотрении полоса

$$-\pi<\mathrm{Im}\left\{\underline{q}\right\}\le\pi,$$

симметричная относительно действительной оси (рис. 9.9). Эту полосу называют *основной*.

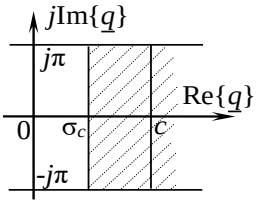


Рис. 9.9

Функция $U\left(\underline{q}\right)$ может иметь особые точки. В задачах автоматического управления ими являются полюсы – корни знаменателя $U\left(\underline{q}\right)$. Если в основной полосе существуют особые точки $U\left(\underline{q}\right)$

$$\underline{q}_{\nu}=\sigma_{*\nu}+j\,\omega_{*\nu},$$

то все остальные полюсы определяются исходя из условия периодичности $U\left(\underline{q}\right)$

$$\underline{q}_{\nu k}=\sigma_{*\nu}+j\left(\omega_{*\nu}+2\pi k\right),$$

где $k=\overline{\pm1,\ \pm\infty}$; $\nu=\overline{1,\ n}$; n – число полюсов в основной полосе.

9.9 Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВЯЗЬ С D-ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Вычисления становятся еще более простыми, если в (9.15) вместо переменной $\underline{q}$ ввести переменную

$$\underline{z}=e^{\underline{q}}=e^{pT}.$$

Тогда ряд (9.15) преобразуется в ряд по понижающимся степеням $\underline{z}$

$$U\left(\underline{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)\underline{z}^{-n}\ . \tag{9.19}$$

Это преобразование получило название Z-преобразования.

Для смещенной функции $u(n,\varepsilon)$ оно имеет следующую форму:

$$U\left(\underline{z},\varepsilon\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n,\varepsilon)\underline{z}^{-n} \tag{9.20}$$

и часто называется *модифицированным Z-преобразованием*.

Сравнивая (9.13), (9.15) и (9.19) можно вывести связь между преобразованиями

$$L\left\{u^*(t)\right\}=U\left(e^{pt}\right)=U\left(e^{\underline{q}}\right)_{\underline{q}=pT}=U\left(\underline{z}\right)_{\underline{z}=e^{pT}}\ .$$

Преобразование комплексного переменного $\underline{q}$ по формуле $z=e^{\underline{q}}$ переводит основную полосу плоскости $\underline{q}$ (рис. 9.9) на всю расширенную плоскость комплексной переменной. Действительно, если $\sigma_c=0$, то левая полуполоса $\mathrm{Re}\left\{\underline{q}\right\}<\sigma_c=0$ отображается во внутренность единичного круга $\left|\underline{z}\right|<1$ плоскости $\underline{z}$, а правая полуполоса $\mathrm{Re}\left\{\underline{q}\right\}>\sigma_c=0$ – во внешность этого круга (рис. 9.10). При этом отрезок мнимой оси $-\pi<\omega_*\le\pi$ отображается в окружность единичного радиуса, поскольку $\left|e^{j\omega_*}\right|=1$. Поэтому функция $U(\underline{z})$, определяемая (9.20), аналитична в области $\left|\underline{z}\right|>e^{\sigma_c}$, т.е. вне круга, где $\underline{z}\ge e^{\sigma_c+j\omega_*}$ $(-\pi<\omega_*\le\pi)$.

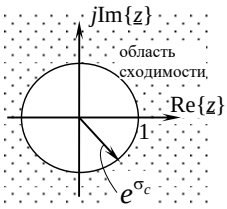


Рис. 9.10

Особые точки $\underline{q}_{\nu k}=\sigma_{*\nu}+j\left(\omega_{*\nu}+2\pi k\right)$ $\left(k=\overline{\pm1,\ \pm\infty}\right)$ изображения $U\left(\underline{q},\varepsilon\right)$ при отображении перейдут в точки

$$\underline{z}_v = e^{\sigma_{*v} + j(\omega_{*v} + 2\pi k)} = e^{\sigma_{*v} + j\omega_{*v}},$$

лежащие внутри круга $\underline{z} \le e^{\sigma_c + j\omega_*}$ $(-\pi < \omega_* \le \pi)$.

Пример 9.9 *Пусть* $u(n) = 1(n)$.

$$Z\{1(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1(n)\underline{z}^{-n} = \underline{z}^0 + \underline{z}^{-1} + \underline{z}^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-\underline{z}^{-1}} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}-1}.$$

Аналогичный результат можно получить и из *D*-изображения $1(n)$ путем подстановки $\underline{z} = e^{\underline{q}}$

$$U(\underline{q}) = \frac{e^{\underline{q}}}{-1+e^{\underline{q}}} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}-1}.$$

9.10 ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Путем замены $\underline{z} = e^{\underline{q}}$ в (9.16) можно получить формулу обращения *Z*-преобразования

$$u(n,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi j}\int_C U(\underline{z},\varepsilon)\underline{z}^{n-1} d\underline{z}.$$

Интегрирование ведется по окружности *C* радиуса e^{σ}, где $\sigma > \sigma_0$, в положительном направлении (против часовой стрелки).

Используя этот же прием, можно получить формулы разложения через вычеты. Воспользуемся (9.17) и (9.18):

$$u(n,\varepsilon) = \sum_{v=1}^{m} \mathrm{Res}\left\{U(\underline{z},\varepsilon)\underline{z}^{n-1}\right\}_{\underline{z}=\underline{z}_v},$$

где $\underline{z} = \underline{z}_v$ – полюс изображения $U(\underline{z},\varepsilon)$.

В случае простого полюса

$$\mathrm{Res}\left\{U(\underline{z},\varepsilon)\underline{z}^{n-1}\right\}_{\underline{z}=\underline{z}_v} = \lim_{\underline{z}\to\underline{z}_v}\left\{U(\underline{z},\varepsilon)(\underline{z}-\underline{z}_v)\underline{z}^{n-1}\right\}.$$

Вычет в полюсе $\underline{z}_v$ кратности r_v определяется в соответствии с (9.18)

$$\mathrm{Res}\left\{U(\underline{z},\varepsilon)\underline{z}^{n-1}\right\}_{\underline{z}=\underline{z}_v} = \frac{1}{(r_v-1)!}\lim_{\underline{z}\to\underline{z}_v}\frac{d^{r-1}}{d\underline{z}^{r-1}}\left\{U(\underline{z},\varepsilon)(\underline{z}-\underline{z}_v)^{r_v}\underline{z}^{n-1}\right\}. \qquad (9.21)$$

Пример 9.10 *Определить оригинал, соответствующий изображению* $U(\underline{z}) = \dfrac{\underline{z}}{\underline{z}-1}$.

Оригинал будет равен вычету $U(\underline{z})$ в полюсе $\underline{z}_1 = 1$

$$u(n) = \operatorname{Res}\left\{U(\underline{z})\underline{z}^{n-1}\right\} = \lim_{\underline{z}\to 1}\left\{\frac{\underline{z}}{\underline{z}-1}(\underline{z}-1)\underline{z}^{n-1}\right\} = 1^n .$$

Пример 9.11 *Определить оригинал, соответствующий изображению* $U(\underline{z}) = \dfrac{\underline{z}}{(\underline{z}-1)^2}$.

Имеется кратный полюс $\underline{z} = 1$, кратность $r = 2$. Согласно (9.21) получим

$$u(n) = \lim_{\underline{z}\to 1}\frac{d}{d\underline{z}}\left\{\frac{\underline{z}}{(\underline{z}-1)^2}(\underline{z}-1)^2\underline{z}^{n-1}\right\} = \lim_{\underline{z}\to 1}\left\{n\underline{z}^{n-1}\right\} = n .$$

9.11 Свойства D- и Z-преобразований

1. *Свойство линейности.* Изображение линейной комбинации оригиналов равно линейной комбинации их изображений

$$\sum_{v=1}^{m} a_v u_v(n,\varepsilon) \Leftrightarrow \sum_{v=1}^{m} a_v U(\underline{q},\varepsilon) \Leftrightarrow \sum_{v=1}^{m} a_v U(\underline{z},\varepsilon) .$$

2. *Теорема сдвига*. Если функция $u(n,\varepsilon)$ имеет изображения $U(\underline{q},\varepsilon)$ и $U(\underline{z},\varepsilon)$, то сдвинутая решетчатая функция $u(n-k,\varepsilon)$ $k > 0$ имеет следующее изображение:

$$u(n-k,\varepsilon) \Leftrightarrow e^{-\underline{q}k}U(\underline{q},\varepsilon) \Leftrightarrow \underline{z}^{-k}U(\underline{z},\varepsilon), \tag{9.22}$$

$$u(n+k,\varepsilon) \Leftrightarrow e^{\underline{q}k}\left[U(\underline{q}) - \sum_{v=0}^{k-1} u(v)e^{-\underline{q}v}\right] \Leftrightarrow \underline{z}^{k}\left[U(\underline{z}) - \sum_{v=0}^{k-1} u(v)\underline{z}^{-v}\right].$$

Пример 9.12 *Z-изображение* $u(n) = 1(n)$ *равно* $U(\underline{z}) = \dfrac{\underline{z}}{\underline{z}-1}$. *Найти изображение для функции* $u(n) = 1(n-3)$ *(рис. 9.11).*

В соответствии с формулой (9.22)

$$u(n-3) \Leftrightarrow \underline{z}^{-3}U\left(\underline{z}\right) = \frac{\underline{z}^{-3}\underline{z}}{\underline{z}-1} = \frac{1}{\underline{z}^{2}\left(\underline{z}-1\right)}.$$

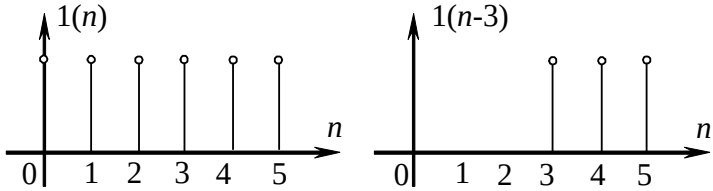


Рис. 9.11

3. *Теорема о смещении в области изображений*. Если решетчатая функция $u(n)$ является оригиналом, а $U\left(\underline{q},\varepsilon\right)$ и $U\left(\underline{z},\varepsilon\right)$ – ее изображения, то

$$U\left(\underline{q}\pm\lambda\right) \Leftrightarrow e^{\mp\lambda Tn}u(n,\varepsilon) \Leftrightarrow U\left(\underline{z}e^{\pm\lambda T}\right). \qquad (9.23)$$

Пример 9.13 *Найти изображение функции* $u(n) = e^{\alpha n}1(n)$.

В соответствии с (9.23) получаем

$$Z\left\{e^{\alpha n}1(n)\right\} = \frac{e^{-\alpha}\underline{z}}{e^{-\alpha}\underline{z}-1}.$$

4. *Изображение конечных разностей*. Теорема. Если решетчатая функция $u(n)$ является оригиналом, а $U\left(\underline{q}\right)$ и $U\left(\underline{z}\right)$ – ее изображения, то первая разность $\Delta u(n)$ также является оригиналом, причем

$$D\left\{\Delta u(n)\right\} = \left(e^{\underline{q}}-1\right)U\left(\underline{q}\right) - e^{\underline{q}}u(0),$$

$$Z\left\{\Delta u(n)\right\} = \left(\underline{z}-1\right)U\left(\underline{z}\right) - \underline{z}u(0).$$

Поскольку $u(n)$ является оригиналом, то и разность k-го порядка будет оригиналом, в связи с чем

$$D\left\{\Delta^{k}u(n)\right\} = \left(e^{\underline{q}}-1\right)^{k}U\left(\underline{q}\right) - e^{\underline{q}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(e^{\underline{q}}-1\right)^{k-1-\nu}\Delta^{\nu}u(0),$$

$$Z\left\{\Delta^k u(n)\right\} = \left(\underline{z}-1\right)^k U\left(\underline{z}\right) - \underline{z}\sum_{v=0}^{k-1}\left(\underline{z}-1\right)^{k-1-v}\Delta^v u(0).$$

5. *Суммирование*. Теорема. Если решетчатая функция $u(n)$ является оригиналом, а $U\left(\underline{q}\right)$ и $U\left(\underline{z}\right)$ – ее изображения, то справедливы соотношения

$$D\left\{\sum_{m=0}^{n-1}u(m)\right\} = \frac{U\left(\underline{q}\right)}{e^{\underline{q}}-1}, \quad Z\left\{\sum_{m=0}^{n-1}u(m)\right\} = \frac{U\left(\underline{z}\right)}{\underline{z}-1}, \quad (n=1,2,\ldots).$$

6. *Свертка*. Свертка решетчатых функций $u(n)$ и $g(n)$ определяется следующим образом:

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n}u(n-m)g(m) = \sum_{m=0}^{n}g(n-m)u(m).$$

Изображение свертки:

$$F\left(\underline{q}\right) = D\left\{\sum_{m=0}^{n}u(n-m)g(m)\right\} = U\left(\underline{q}\right)G\left(\underline{q}\right),$$

где $U\left(\underline{q}\right) = D\left\{u(n)\right\}$, $G\left(\underline{q}\right) = D\left\{g(n)\right\}$.

$$F\left(\underline{z}\right) = U\left(\underline{z}\right)G\left(\underline{z}\right), \tag{9.24}$$

где $U\left(\underline{z}\right) = Z\left\{u(n)\right\}$, $G\left(\underline{z}\right) = Z\left\{g(n)\right\}$.

7. *Теорема о начальном значении*. Если существуют изображения $U\left(\underline{q}\right)$ и $U\left(\underline{z}\right)$, то начальное значение $u(0)$ определяется как

$$u(0) = \lim_{\underline{q}\to\infty}U\left(\underline{q}\right),$$

где предел берется по любой кривой, принадлежащей области определения изображения, причем

$$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg\left\{\underline{q}\right\} < \frac{\pi}{2}-\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Или

$$u(0) = \lim_{\underline{z}\to\infty}U\left(\underline{z}\right), \tag{9.25}$$

причем $\underline{z}\to\infty$ либо вдоль вещественной оси, либо вдоль

произвольного пути, так как $U\left(\underline{z}\right)$ при $\underline{z}=\infty$ аналитическая.

Пример 9.14 *Найти начальное значение* $u(0)$ *по изображению* $Z\left\{1(n)\right\}=\dfrac{\underline{z}}{\underline{z}-1}$.

Согласно (9.25)

$$u(0)=\lim_{\underline{z}\to\infty}\frac{\underline{z}}{\underline{z}-1}=1\,.$$

8. *Теорема о конечном значении*. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)$ существует, то

$$\lim_{\underline{q}\to 0}U\left(\underline{q}\right)\left(e^{\underline{q}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}u(n)$$

и

$$\lim_{\underline{z}\to 1+}U\left(\underline{z}\right)\left(\underline{z}-1\right)=\lim_{n\to\infty}u(n)\,. \qquad (9.26)$$

Знак "+" при 1 означает, что $\underline{z}$ стремится к единичной окружности извне.

Примечание: чтобы эта теорема могла быть применена, необходимо знать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)$ существует. Если ряд $u(n)$ при $n\to\infty$ расходится, то теорема теряет силу, хотя, быть может, пределы от $U\left(\underline{q}\right)\left(e^{\underline{q}}-1\right)$ или $U\left(\underline{z}\right)\left(\underline{z}-1\right)$ и существуют.

Пример 9.15 *Предел*

$$\lim_{\underline{z}\to 1+}\left(\underline{z}-1\right)\frac{\underline{z}}{\underline{z}+1}=0\,.$$

Но предел $\lim(-1)^n$ не существует. Следовательно, теорема для функции

$$u(n)=(-1)^n \Leftrightarrow \frac{\underline{z}}{\underline{z}+1}$$

неприменима.

Пример 9.16 *Найти конечное значение функции* $u(nT)$, *если ее изображение* $U\left(\underline{z}\right)=\dfrac{\underline{z}}{\underline{z}-e^{-\alpha}}$.

Предел

$$\lim_{\underline{z}\to 1+} U(\underline{z})(\underline{z}-1) = \lim_{\underline{z}\to 1+}(\underline{z}-1)\frac{\underline{z}}{\underline{z}-e^{-\alpha}} = 0 .$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\alpha n} = 0$, то теорема (9.26) выполняется.

9.12 Решение разностных уравнений с помощью Z-преобразования

Пусть дано разностное уравнение вида "вход-выход"

$$a_m u_1(n+m) + a_{m-1}u_1(n+m-1) + \cdots + a_0 u_1(n) =$$
$$= b_l u_0(n+l) + b_{l-1}u_0(n+l-1) + \cdots + b_0 u_0(n) .$$

После Z-преобразования будем иметь следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & a_m \underline{z}^m \left[U_1(\underline{z}) - u_1(0) - u_1(1)\underline{z}^{-1} - \cdots - u_1(m-1)z^{-(m-1)}\right] + \cdots + \\ & + a_1 \underline{z}\left[U_1(\underline{z}) - u_1(0)\right] + a_0 U_1(\underline{z}) = \\ & = b_l \underline{z}^l \left[U_0(\underline{z}) - u_0(0) - u_0(1)\underline{z}^{-1} - \cdots - u_0(l-1)z^{-(l-1)}\right] + \cdots + \\ & + b_1 \underline{z}\left[U_0(\underline{z}) - u_0(0)\right] + b_0 U_0(\underline{z}) , \end{aligned} \tag{9.27}$$

где $U_1(\underline{z}) = Z\{u_1(\underline{n})\}$, а $U_0(z) = Z\{u_0(n)\}$.

Как и в случае преобразования Лапласа, z-преобразование автоматически учитывает начальные условия.

Введем обозначения

$$A(\underline{z}) = a_m \underline{z}^m + \cdots + a_1 \underline{z} + a_0 , \; B(\underline{z}) = a_l \underline{z}^l + \cdots + b_1 \underline{z} + b_0 ,$$

$$\begin{aligned} P(\underline{z}) = {} & u_1(0)(a_m \underline{z}^m + a_{m-1}\underline{z}^{m-1} + \cdots + a_1) + \\ & + u_1(1)(a_m \underline{z}^{m-1} + a_{m-1}\underline{z}^{m-2} + \cdots + a_2) + \cdots + \\ & + u_1(m-1)a_m \underline{z} - \\ & - u_0(0)(b_l \underline{z}^l + b_{l-1}\underline{z}^{l-1} + \cdots + b_1) - \\ & - u_0(1)(b_l \underline{z}^{l-1} + b_{l-1}\underline{z}^{l-2} + \cdots + b_2) - \cdots - \\ & - u_0(l-1)b_l \underline{z} . \end{aligned}$$

Тогда уравнение (9.27)можно переписать следующим образом:

$$U_1(\underline{z}) = \frac{B(\underline{z})}{A(\underline{z})} U_0(\underline{z}) + \frac{P(\underline{z})}{A(\underline{z})} . \tag{9.28}$$

Согласно (9.28) решение разностного уравнения (9.27)

состоит из двух составляющих: реакции системы на входное воздействие при нулевых начальных условиях

$$u_1'(n) = \underline{z}^{-1}\left\{\frac{B(\underline{z})}{A(\underline{z})}U_0(\underline{z})\right\}$$

и составляющей части свободного процесса, вызванной ненулевыми начальными условиями системы

$$u_1''(n) = \underline{z}^{-1}\left\{\frac{P(\underline{z})}{A(\underline{z})}\right\}.$$

9.13 Определение передаточной функции по разностному уравнению

Если уравнение (9.28) является разностным уравнением дискретной системы, то при нулевых начальных условиях из него можно найти передаточную функцию системы.

Пусть начальные условия нулевые. Тогда $P(\underline{z}) = 0$ и отношение

$$\left.\frac{U_1(\underline{z})}{U_0(\underline{z})}\right|_{P(\underline{z})=0} = W(\underline{z}) = \frac{B(\underline{z})}{A(\underline{z})} \tag{9.29}$$

определяет передаточную функцию $W(\underline{z})$ дискретной системы.

9.14 Частотные характеристики

Для получения АФЧХ дискретной системы нужно в (9.29) подставить $\underline{z} = e^{j\omega T}$, где T – период дискретизации. Полагая $\omega_* = \omega T$ из (9.29) при $\underline{z} = e^{j\omega_*}$ следует АФЧХ дискретной системы:

$$\underline{W}(j\omega_*) = \frac{B(e^{j\omega_*})}{A(e^{j\omega_*})} = W(\omega_*)e^{j\varphi(\omega_*)}, \tag{9.30}$$

где $-\pi < \omega_* \le \pi$, поскольку $\underline{W}(j\omega_*)$ – периодическая функция. Это следует из периодичности изображения $W(\underline{z})$.

По аналогии с непрерывными системами:

$$W(\omega_*) = \left|\underline{W}(j\omega_*)\right|$$

называется АЧХ, а

$$\varphi(\omega_*) = \arg\left\{\underline{W}(j\omega_*)\right\}$$

носит название ФЧХ.

Поскольку $e^{j(\omega_* - \pi)} = e^{j\omega_*} e^{-j\pi} = -e^{j\omega_*}$, то АФЧХ, определяемая по (9.30), симметрична относительно действительной оси. Поэтому АФЧХ строится только для $0 \le \omega_* \le \pi$.

Пример 9.17 *Определить частотные характеристики системы*

$$W(\underline{z}) = \frac{1}{\underline{z}^2 + \underline{z} + 0{,}5}.$$

АФЧХ согласно (9.30)

$$\underline{W}(j\omega_*) = \frac{1}{e^{2j\omega_*} + e^{j\omega_*} + 1} = \frac{1}{\left(\cos 2\omega_* + \cos\omega_* + 0{,}5\right) + j\left(\sin 2\omega_* + \sin\omega_*\right)}.$$

Графики требуемых функций приведены на рис. 9.12

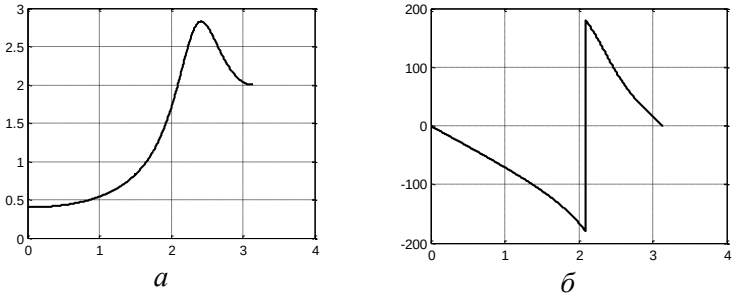


Рис. 9.12 Частотные характеристики системы с $W(\underline{z}) = \dfrac{1}{\underline{z}^2 + \underline{z} + 0{,}5}$: а – АЧХ; б – ФЧХ

ГЛАВА 10

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

10.1 ИМПУЛЬСНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Импульсная система представляет собой каскадное соединение импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НС) (рис. 10.1).

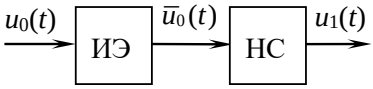


Рис. 10.1

Импульсный элемент преобразует входной сигнал $u_0(t)$ в последовательность модулированных импульсов $\bar{u}_0(t)$ (рис. 10.2), которая воздействует на вход непрерывной части.

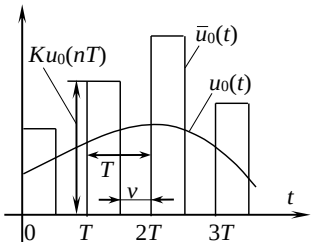


Рис. 10.2

Основными параметрами ИЭ являются *коэффициент усиления K*, *период* повторения T (частота повторения $\omega = 2\pi/T$), *скважность* импульсов $\gamma = \dfrac{v}{T}$.

Импульсный элемент моделирует выходной сигнал в зависимости от входной величины. Модуляция бывает разная, наиболее распространены амплитудная и широтная. В обоих случаях период повторения импульсов остается постоянным, но при амплитудной модуляции пропорционально входной величине $u_0(t)$ меняется амплитуда импульсов (ширина импульса v остается постоянной), а при широтной модуляции меняется ширина импульса v (амплитуда остается постоянной) (рис. 10.3).

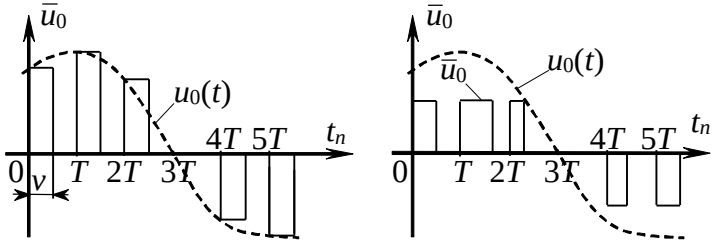


Рис. 10.3

Мы будем рассматривать амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ). В случае амплитудной модуляции площадь, ограниченная n-м импульсом, равна

$$S_n = K\nu u_0(nT)\,.$$

Если K и ν выбраны так, что

$$K\nu = 1\,, \tag{10.1}$$

то площадь $S_n = u(nT)$.

10.2 Приведение импульсного элемента к простейшей форме

Простейшим будем называть такой ИЭ, импульсы которого мгновенны, т.е. их ширина $\nu \to 0$. Требуется, чтобы простейший ИЭ удовлетворял условию (10.1). Видно, что при этом $K \to \infty$, но площадь S_n остается равной значению $u(nT)$. Следовательно, простейший ИЭ вырабатывает δ-импульсы, модулированные входным сигналом $u_0(t)$ (рис. 10.4):

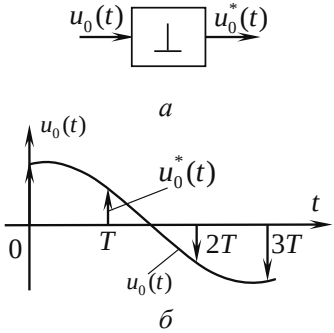


Рис. 10.4 Простейший импульсный элемент: а – графическое изображение; б – сигнал на выходе ИЭ

$$u_1^*(t) = u_0(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty}u_0(nT)\,\delta(t-nT)\,.$$

Введение в рассмотрение простейшего ИЭ позволяет смоделировать АИМ-элемент с помощью каскадно соединенных простейшего импульсного и формирующего (ФЭ) элементов (рис. 10.5). При этом реакция ФЭ $w_{ФЭ}(t)$ на δ -импульсы простейшего импульсного элемента (импульсная характеристика) должна быть идентична импульсу, формируемому моделируемым импульсным элементом.

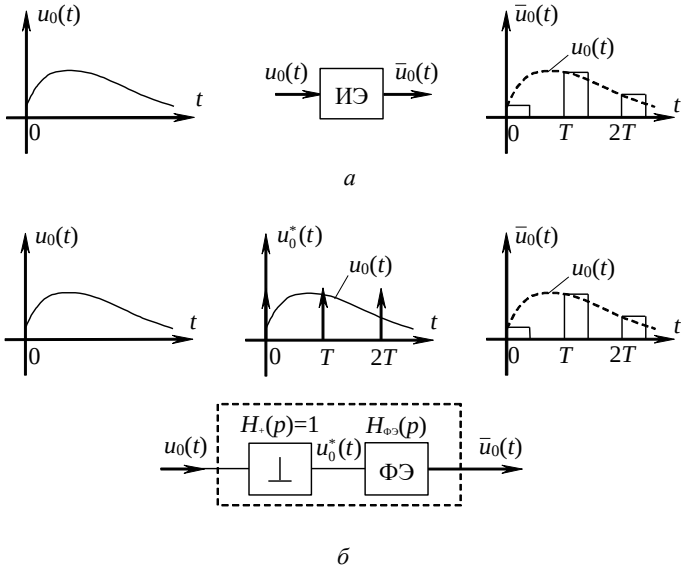


Рис. 10.5 Замена импульсного элемента (а) на каскад из простейшего импульсного и формирующего элементов (б)

Пусть ИЭ формирует импульсы следующим образом:

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(nT)\psi(\theta), & nT \le t \le nT + v; \\ 0, & t \ge v. \end{cases} \qquad (10.2)$$

где $\psi(\theta)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $0 \le \theta \le v$ каждого импульса.

Следовательно, импульсная характеристика ФЭ должна отвечать условиям

$$w_{\text{ФЭ}}(t) = \begin{cases} \psi(t), & 0 \le t < v; \\ 0, & t \ge v. \end{cases} \tag{10.3}$$

Тогда передаточная функция ФЭ определяется как

$$H_{\text{ФЭ}}(p) = \int_0^v \psi(t) e^{-pt} dt \,. \tag{10.4}$$

Пример 10.1 *Привести к простейшему импульсный элемент, формирующий на своем выходе прямоугольные модулированные импульсы.*

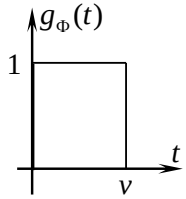


Рис. 10.6

Импульсный элемент формирует выходной сигнал $\bar{u}_0(t)$ по следующему закону:

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} K u_0(nT) & \text{при } nT \le t < nT + v; \\ 0 & \text{при } nT + v \le t < (n+1)T. \end{cases}$$

Согласно (10.2) и (10.3) импульсная характеристика ФЭ должна быть (рис. 10.6)

$$w_{\text{ФЭ}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le v; \\ 0, & t < 0,\ t > v. \end{cases}$$

Передаточная функция в соответствии с (10.4)

$$H_{\text{ФЭ}}(p) = \int_0^v 1 e^{-pt} dt = K \frac{1 - e^{-pv}}{p} \,. \tag{10.5}$$

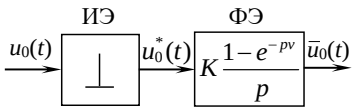


Рис. 10.7

Таким образом, ИЭ может быть приведен к простейшему с помощью ФЭ (10.5). Его схема приведена на рис. 10.7

10.3 Приведённая непрерывная часть

Формирующий элемент импульсной системы может быть отнесен к непрерывной части. В результате такого каскадного присоединения ФЭ получается новая непрерывная часть, называемая *приведенной* непрерывной частью (рис. 10.8). Если известны передаточные функции ФЭ $H_{\text{ф}}(p)$ и непрерывной части $H(p)$, то передаточная функция приведенной непрерывной части определяется просто:

$$S(p) = H_{\text{ф}}(p) H(p) \,. \tag{10.6}$$

Так, в случае формирующего элемента, рассмотренного в

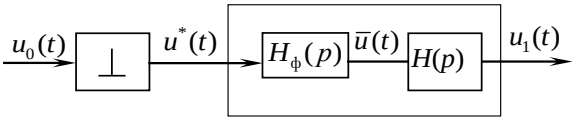


Рис. 10.8

пример 10.1, передаточная функция приведенной непрерывной части будет следующей:

$$S(p) = K\frac{1-e^{-pv}}{p}H(p).$$

10.4 Весовая функция импульсной системы

Пусть дана импульсная система с непрерывной частью $H(p)$ (Рис. 10.9). После приведения непрерывных частей получим систему, представленную на Рис. 10.10.

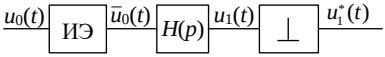


Рис. 10.9

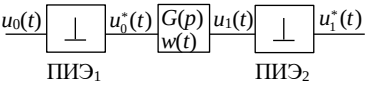


Рис. 10.10

Сигнал $u_0^*(t)$, поступающий на вход непрерывной части системы, описывается уравнением

$$u_0^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(nT)\,\delta(t-nT).$$

Зная весовую функцию приведенной непрерывной части $w(t) \Leftrightarrow H_ф(p)H(p) = G(p)$, можно найти сигнал на выходе

$$u_1^*(t) = \int_0^{\infty} u_0^*(\tau)\,w(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty} u_0(mT)\,\delta(\tau-mT)\right]w(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} u_0(mT)\int_0^{\infty} w(t-\tau)\,\delta(\tau-mT)\,d\tau.$$

Благодаря фильтрующим свойствам $\delta(\tau-mT)$, а именно из-за того, что

$$\int_0^\infty w(t-\tau)\,\delta(\tau-mT)\,d\tau = w(t-mT)\,,$$

получим

$$u_1^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(mT)\,w(t-mT)\,.$$

Поскольку простейшие импульсные элементы ПИЭ$_1$ и ПИЭ$_2$ работают синхронно, то

$$u_1(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} u_0(mT)\,w(nT-mT)\,.$$

Положим $(n-m)T = \nu T,\ m = n-\nu$. Тогда

$$u_1(nT) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[u_0(n-\nu)T\right] w(\nu T)\,. \qquad (10.7)$$

Отсюда следует важная связь. А именно: *весовая функция* $w(nT)$ импульсной системы может быть получена из весовой функции приведенной непрерывной части $w(t)$ путем выборки отсчетов из последней в моменты времени $t = nT$

$$w(nT) = w(t)\big|_{t=nT}\,. \qquad (10.8)$$

Передаточная функция определяется с помощью свойства *Z*-изображений (9.24), примененного к (10.7)

$$U_1(\underline{z}) = U_0(\underline{z})G(\underline{z})\,,$$

где

$$G(\underline{z}) = Z\left\{w(nT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)e^{-npT}\,.$$

Иными словами, для того чтобы получить передаточную функцию импульсной системы, необходимо согласно (10.8) из весовой функции непрерывной части $w(t)$ взять отсчеты в дискретные моменты $t = nT$ и преобразовать по Лапласу (выполнить *Z*-преобразование).

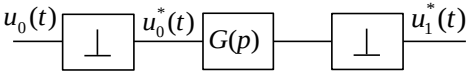
Пример 10.2 *Найти передаточную функцию импульсной системы, если известна передаточная функция приведенной непрерывной части G(p).*

$$G(p) = \frac{K}{p+\alpha}\,;\ \rightarrow\ w(t) = Ke^{-\alpha t}\,;\ \rightarrow\ w(nT) = Ke^{-n\alpha T}\ \rightarrow\ G(\underline{z}) = K\frac{\underline{z}}{\underline{z}-e^{-\alpha T}}\,.$$

Обычно по схеме этого примера составляются таблицы переходов от $G(p)$ к $G(\underline{z})$.

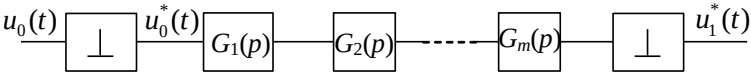
10.5 Алгебра Z-преобразования

1. Передаточная функция импульсной системы



$$U_1^*(\underline{z}) = U_0^*(\underline{z})G(\underline{z}).$$

2. Передаточная функция импульсной системы с каскадным соединением непрерывных частей

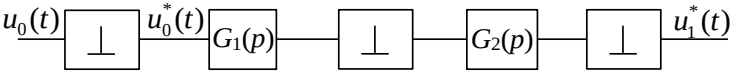


$$U_1(\underline{z}) = U_0(\underline{z})H(\underline{z}),$$

где

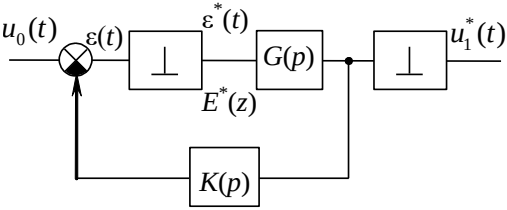
$$H(\underline{z}) = \zeta\{G_1(p)\ G_2(p)\ \cdots\ G_m(p)\}.$$

3. Передаточная функция импульсной системы с промежуточными импульсными элементами



$$U_1(\underline{z}) = U_0(\underline{z})G_0(\underline{z})G_1(\underline{z}).$$

4. Передаточная функция замкнутой системы



Изображение сигнала ошибки $\varepsilon^*(t)$

$$E^*(\underline{z}) = U_0^*(\underline{z}) - E^*(\underline{z})GK(\underline{z}),$$

где

$$GK(\underline{z}) = \zeta\{G(p)K(p)\}.$$

В то же время

$$E^*(\underline{z})G(\underline{z}) = U_1^*(\underline{z}).$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы

$$W(\underline{z}) = \frac{U_1^*(\underline{z})}{U_0^*(\underline{z})} = \frac{G(\underline{z})\left[U_0^*(\underline{z})/\left(1+G\,K(\underline{z})\right)\right]}{U_0^*(\underline{z})} = \frac{G(\underline{z})}{1+G\,K(\underline{z})}.$$

10.6 Определение реакции импульсной системы

Передаточная функция импульсной системы определяется в общем случае как

$$H(z) = \frac{U_1(z)}{U_0(z)}$$

при нулевых начальных условиях. Здесь $U_0(z)$ и $U_1(z)$ – изображения входных и выходных сигналов.

Как правило, передаточная функция определяется исходя из передаточной функции непрерывной части $G(p)$ (свойство 1 из п. 10.5).

Для этого выполняют следующие шаги:

1) по (10.4) определяют передаточную функцию ФЭ $H_{\text{ф}}(p)$;

2) определяют передаточную функцию приведенной непрерывной части $G(p)$ по (10.6);

3) раскладывают $G(p)$ на элементарные дроби и по таблицам соответствий определяют *z*-изображения. Складывая изображения, получают передаточную функцию импульсной системы $G(\underline{z})$;

4) по передаточной функции $G(\underline{z})$ вычисляют выходной сигнал. Его изображение

$$U_1(\underline{z}) = G(\underline{z})U_0(\underline{z});$$

5) обратившись снова к таблицам *z*-изображений определяют по $U_1(\underline{z})$ решетчатую функцию, соответствующую выходному сигналу $u_1(n)$, $\left(n = \overline{0,\infty}\right)$.

10.7 Определение выходного сигнала между дискретами

Для системы (рис. 10.11) будем иметь

$$U_1(\underline{z}) = G(\underline{z})U_0(\underline{z}).$$

Изображение $U_1(\underline{z})$ соответствует отсчетам $u_1(nT)$, т.е. сигналу на выходе импульсной системы в дискретные моменты $t_n = nT$.

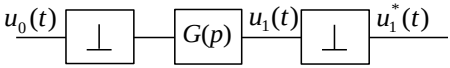


Рис. 10.11

Если нужно знать значения сигнала в промежутках между дискретами, например в моменты времени $t_n + \varepsilon T$, то необходимо сместить выходной сигнал $u_1(t)$ на время εT, оставляя дискретные моменты времени прежними (рис. 10.12).

Благодаря опережению εT, в дискретные моменты времени $t_n = nT$ получим сигнал $u_1(nT + \varepsilon T)$ на выходе. Это значит, что в систему вводится элемент с передаточной функцией

$$L\{w(t+\varepsilon T)\} = e^{p\varepsilon T}H(p),$$

где $w(t)$ и $H(p)$ соответственно весовая и передаточная функции непрерывной части (рис. 10.13).

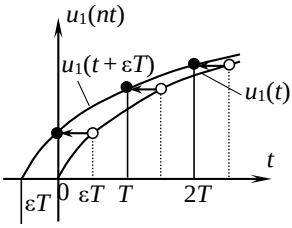


Рис. 10.12

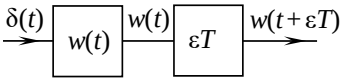


Рис. 10.13

Учитывая соответствие (10.8), получаем, что

$$u_1(nT+\varepsilon T) = \sum_{k=0}^{\infty} u_0(kT)\, w(nT+\varepsilon T-kT) \Leftrightarrow U_0(\underline{z})H(\underline{z},\varepsilon),$$

т.е.

$$U_1(\underline{z},\varepsilon) = U_0(\underline{z})H(\underline{z},\varepsilon),$$

где $H(\underline{z},\varepsilon) \Leftrightarrow Z\{w(nT+\varepsilon T)\}$.

Примечания:

1. Если не требуется определять сигнал в промежутках между дискретами, то нет нужды использовать модифицированное преобразование.

2. Если сигнал на входе импульсного элемента имеет разрывы первого рода, то применение модифицированного Z-преобразования обязательно. Имеют место следующие равенства (рис. 10.14):

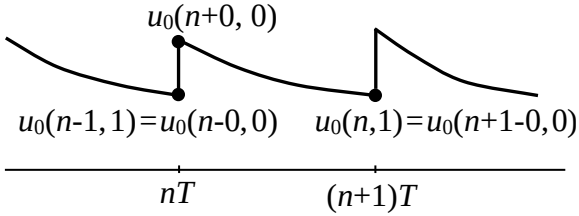


Рис. 10.14

а) импульсная система реагирует на "правые" значения u_0

$$U_0\left(\underline{z}\right)=U_0\left(\underline{z},\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0}=U_0\left(\underline{z},0\right)\Leftrightarrow u_0(n+0,0);$$

б) определение значений сигнала в моменты до скачка

$$u_0(n,1)=u_0(n+1-0,0)\Leftrightarrow U_0\left(\underline{z},1\right)\ \left(\lim_{\varepsilon\to 1}u_0(n,\varepsilon)\Leftrightarrow U_0\left(\underline{z},1\right)\right),$$

$$u_0(n-0,0)=u_0[(n+1-0)-1,\ 0]\Leftrightarrow \underline{z}^{-1}U_0\left(\underline{z},1\right).$$

10.8 **УЧЁТ ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ**

При получении передаточных функций импульсной системы появляются составляющие вида

$$W(p)=e^{-p\tau}H(p).$$

Модифицированное Z-преобразование имеет в этом случае следующий вид (положим, что $\tau=(\nu+\gamma)T$, где $\nu=\mathrm{ent}(\tau/T)$ – целая, γ – дробная части):

$$W\left(\underline{z},\varepsilon\right)=\begin{cases}\underline{z}^{-(\nu+1)}G\left(\underline{z},1+\varepsilon-\gamma\right); & 0\le\varepsilon\le\gamma,\\ \underline{z}^{-\nu}G\left(\underline{z},\varepsilon-\gamma\right); & \gamma\le\varepsilon\le 1.\end{cases}$$

Если $\gamma = 0$, то $\tau = \nu T$, и модифицированное преобразование принимает вид

$$W(\underline{z}, \varepsilon) = z^{-\nu} G(\underline{z}, \varepsilon).$$

10.9 Исследование устойчивости импульсных систем

Импульсная система с обратной связью может при определенных условиях самовозбуждаться и стать неустойчивой. В связи с этим необходимо иметь методы проверки системы на устойчивость.

Для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (знаменателя передаточной функции) были по модулю меньше единицы, т.е. располагались на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.

Обычно исследование устойчивости импульсных систем осуществляется с помощью критериев Найквиста, Михайлова и Гурвица. Приведем их краткое описание.

1. *Критерий Найквиста*. Он формулируется так же, как и в случае непрерывных линейных систем. При этом используется подстановка $\underline{z} = e^{j\omega_*}$ $(0 < \omega_* \le \pi)$ в передаточную функцию разомкнутой системы. Здесь $\omega_* = \omega / \omega_д$, $\omega_д$ – угловая частота дискретизации.

2. *Критерий Гурвица*. Он неприменим непосредственно к характеристическому уравнению импульсной системы. Вначале нужно сделать подстановку

$$\underline{z} = \frac{\underline{w}+1}{\underline{w}-1}$$

и преобразовать характеристическое уравнение.

Пример 10.3 *Определить условие устойчивости системы, передаточная функция которой имеет вид* $W(\underline{z}) = \dfrac{a}{\underline{z} - 1 + b}$.

Произведя замену (10.4) в характеристическом уравнении

$$z-1+b=0\,,$$

получим новое уравнение

$$\frac{\underline{w}+1}{\underline{w}-1}-1+b=\frac{\underline{w}+1-\underline{w}+1+b\left(\underline{w}-1\right)}{\underline{w}-1}=0\ .$$

Отсюда

$$b\underline{w}+2-b=0\,.$$

Чтобы корень этого уравнения был отрицательным, нужно потребовать

$$b>0,\quad 2-b>0\,,$$

т.е. $0<b<2$.

3. *Аналог критерия Михайлова*. Для того чтобы система, имеющая характеристический многочлен $D\left(\underline{z}\right)$, была устойчива, нужно, чтобы кривая $D\left(e^{j\omega_*}\right)$ $(0<\omega_*\le\pi)$ обходила $2k$ квадрантов, где k – порядок многочлена $D\left(\underline{z}\right)$.

Пусть импульсная система имеет характеристический многочлен

$$D\left(\underline{z}\right)=b_k\,\underline{z}^k+b_{k-1}\underline{z}^{k-1}+\cdots+b_0.$$

Заменяя переменную , получим комплекс

$$D\left(\underline{z}\right)=b_k\,\underline{z}^k+b_{k-1}\underline{z}^{k-1}+\cdots+b_0.$$

Меняя ω_* от 0 до π строим кривую, по которой скользит вектор $D\left(e^{j\omega_*}\right)$. На рис. 10.15, *а* приведены кривые для устойчивых систем, а на рис. 10.15, *б* – для неустойчивой системы $D\left(\underline{z}\right)=\underline{z}^3+\underline{z}^2+0,5$.

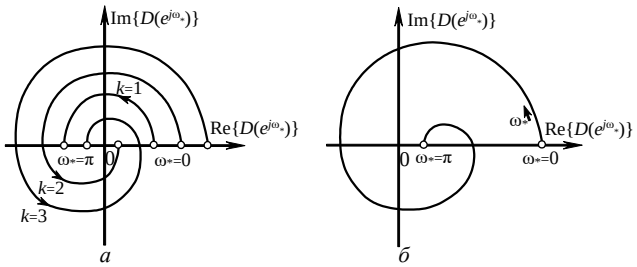


Рис. 10.15

ГЛАВА 11

Модальные преобразования электрических величин

Решение дифференциальных уравнений, описывающих распространение волн тока и напряжения вдоль ЛЭП, является сложной задачей, поскольку требует учета взаимной связи между проводами. Чтобы преодолеть эту сложность удобно рассматривать распространение волн по так называемым волновым каналам, в каждом из которых сигналы распространяются независимо от других каналов.

Этой цели служат модальные преобразования, позволяющие из фазных величин токов и напряжений выделить две составляющие воздушного волнового канала и одну составляющую земляного волнового канала [11]. Первые движутся со скоростью, близкой к скорости света, последняя движется с меньшей скоростью и большим затуханием, что определяется параметрами самих каналов [12, 13]. При этом расчет каждой составляющей осуществляется отдельно в своей однолинейной схеме [14].

Модальные преобразования традиционно используются для математического моделирования электромагнитных процессов, а также в устройствах РЗ и определении места повреждения, основанных на волновом принципе.

11.1 Несимметричная линия

Запишем систему телеграфных уравнений в операторной форме для трехфазной системы бесконечно малой длины (рис. 11.1) [14, 15]:

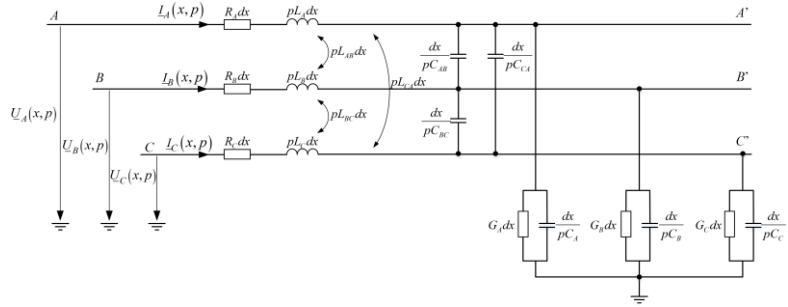


Рис. 11.1 Бесконечно малый элемент трёхфазной сети

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial \underline{U}_A(x,p)}{\partial x} = \left[R_A + pL_A\right]\underline{I}_A(x,p) + pL_{AB}\underline{I}_B(x,p) + pL_{AC}\underline{I}_C(x,p); \\
-\dfrac{\partial \underline{U}_B(x,p)}{\partial x} = pL_{BA}\underline{I}_A(x,p) + \left[R_B + pL_B\right]\underline{I}_B(x,p) + pL_{BC}\underline{I}_C(x,p); \\
-\dfrac{\partial \underline{U}_C(x,p)}{\partial x} = pL_{CA}\underline{I}_A(x,p) + pL_{CB}\underline{I}_B(x,p) + \left[R_C + pL_C\right]\underline{I}_C(x,p); \\
-\dfrac{\partial \underline{I}_A(x,p)}{\partial x} = \left[G_A + p\left(C_A + C_{AB} + C_{AC}\right)\right]\underline{U}_A(x,p) - pC_{AB}\underline{U}_B(x,p) - pC_{AC}\underline{U}_C(x,p); \\
-\dfrac{\partial \underline{I}_B(x,p)}{\partial x} = -pC_{BA}\underline{U}_A(x,p) + \left[G_B + p\left(C_B + C_{BA} + C_{BC}\right)\right]\underline{U}_B(x,p) - pC_{BC}\underline{U}_C(x,p); \\
-\dfrac{\partial \underline{I}_C(x,p)}{\partial x} = -pC_{CA}\underline{U}_A(x,p) - pC_{CB}\underline{U}_B(x,p) + \left[G_C + p\left(C_C + C_{CA} + C_{CB}\right)\right]\underline{U}_C(x,p),
\end{cases}
\tag{11.1}
$$

где $R_\gamma, L_\gamma, C_\gamma, G_\gamma$ – удельные собственные активные сопротивления, индуктивности, ёмкости и активные проводимости утечки на землю;

L_γ, C_γ – удельные взаимные индуктивности и ёмкости фаз;

$p = \alpha + j\omega$ – оператор Лапласа;

$\gamma = A, B, C$

Поскольку взаимные индуктивности и емкости определяются только формой, размером и взаимным расположением проводников, а также от диэлектрической и магнитной проницаемости окружающей среды, то

$$L_{BA} = L_{AB}, L_{CB} = L_{BC}, L_{AC} = L_{CA};$$

$$C_{BA} = C_{AB}, C_{CB} = C_{BC}, C_{AC} = C_{CA}.$$

Систему уравнений (11.1) можно записать в матричной форме:

$$-\frac{\partial \underline{\mathbf{U}}}{\partial x} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}; \tag{11.2}$$

$$-\frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial x} = \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{U}}, \tag{11.3}$$

где $\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \underline{U}_A(x,p) \\ \underline{U}_B(x,p) \\ \underline{U}_C(x,p) \end{bmatrix}$ – вектор фазных комплексных значений напряжений;

$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \underline{I}_A(x,p) \\ \underline{I}_B(x,p) \\ \underline{I}_C(x,p) \end{bmatrix}$ – вектор фазных комплексных значений токов;

$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} R_A + pL_A & pL_{AB} & pL_{CA} \\ pL_{AB} & R_B + pL_B & pL_{BC} \\ pL_{CA} & pL_{BC} & R_C + pL_C \end{bmatrix}$ – матрица удельных сопротивлений;

$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} G_A + p(C_A + C_{AB} + C_{CA}) & -pC_{AB} & -pC_{CA} \\ -pC_{AB} & G_B + p(C_B + C_{AB} + C_{BC}) & -pC_{BC} \\ -pC_{CA} & -pC_{BC} & G_C + p(C_C + C_{BC} + C_{CA}) \end{bmatrix}$

– матрица удельных проводимостей.

Продифференцируем обе части уравнения (11.2)

$$-\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{U}}}{\partial x^2} = \underline{\mathbf{Z}}\frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial x} \tag{11.4}$$

Подставив (11.3) в (11.4),получим дифференциальное уравнение с одной неизвестной:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{U}}}{\partial x^2} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{U}} \tag{11.5}$$

Аналогично продифференцируем (11.3) и подставим в него (11.2):

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{I}}}{\partial x^2} = \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}} \tag{11.6}$$

Решение дифференциальных уравнений (11.5) и (11.6) является сложной задачей, поскольку требует учета взаимной связи между проводами ЛЭП [15]. Чтобы преодолеть эту сложность удобно рассматривать распространение волн по так называемым волновым каналам, в каждом из которых сигналы распространяются независимо от других каналов [16].

Напряжение и токи волновых каналов определяются с использованием свойств матричных преобразований подобия из уравнений:

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_u \underline{\mathbf{U}}_m; \tag{11.7}$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_i \underline{\mathbf{I}}_m, \tag{11.8}$$

где $\mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i$ – матрицы связи величин волновых каналов с фазными величинами.

Подставив (11.7) и (11.8) в (11.5) и (11.6), получим систему дифференциальных уравнений волновых каналов [17]:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{U}}_m}{\partial x^2} = \mathbf{T}_u^{-1} \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{T}_u \underline{\mathbf{U}}_m; \tag{11.9}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{I}}_m}{\partial x^2} = \mathbf{T}_i^{-1} \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}} \mathbf{T}_i \underline{\mathbf{I}}_m, \tag{11.10}$$

где $\mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i$ выбраны такими, чтобы произведения $\mathbf{T}_u^{-1} \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i^{-1} \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}} \mathbf{T}_i$ были диагональными матрицами. Это исключает возникновение взаимного влияния волновых каналов в системе дифференциальных уравнений (11.9) и (11.10).

Как известно из теоремы о приведении матрицы к диагональному виду [15], произведения $\mathbf{T}_u^{-1} \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} \mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i^{-1} \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}} \mathbf{T}_i$ будут являться диагональными матрицами только в том случае, если матрицы $\mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i$ состоят из собственных векторов матриц $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}}$ и $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}$, соответственно.

Таким образом, переход к волновым каналам сводится к задаче определения собственных векторов матриц $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}}$ и $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}$.

11.2 Симметричная и полностью транспонированная линия

Задача определения матриц $\mathbf{T}_u$ и $\mathbf{T}_i$ становится еще проще, если линия электропередачи принимается полностью транспонированной симметричной линией (фазы имеют одинаковое сопротивление, находятся на одинаковом расстоянии друг от друга). Тогда (рис. 11.2):

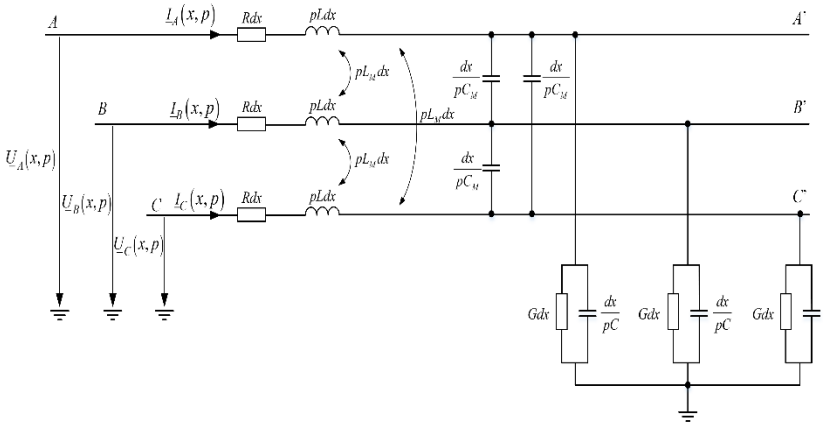


Рис. 11.2 Бесконечно малый элемент симметричной трёхфазной сети

$$R_A = R_B = R_C = R;$$
$$L_A = L_B = L_C = L;$$
$$C_A = C_B = C_C = C;$$
$$G_A = G_B = G_C = G;$$
$$L_{AB} = L_{BC} = L_{CA} = L_M;$$
$$C_{AB} = C_{BC} = C_{CA} = C_M.$$

Матрицы $\underline{\mathbf{Z}}$ и $\underline{\mathbf{Y}}$ примут следующий вид:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} R+pL & pL_M & pL_M \\ pL_M & R+pL & pL_M \\ pL_M & pL_M & R+pL \end{bmatrix} \tag{11.11}$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} G+p(C+2C_M) & -pC_M & -pC_M \\ -pC_M & G+p(C+2C_M) & -pC_M \\ -pC_M & -pC_M & G+p(C+2C_M) \end{bmatrix} \tag{11.12}$$

Матрицы $\underline{\mathbf{Z}}$ и $\underline{\mathbf{Y}}$ симметричны, следовательно, результат их произведения будет симметричная матрица:

$$\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} z & m & m \\ m & z & m \\ m & m & z \end{bmatrix},$$

где $z = (R + pL)\left[G + p(C + 2C_M)\right] + 2p\left[L_M - C_M\right]$;

$m = (R + pL)\left[-pC_M\right] + pL_M\left[G + p(C + C_M)\right]$.

Поскольку $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}$, то $\mathbf{T}_u = \mathbf{T}_i$.

Чтобы найти собственные векторы матриц $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}}$ и $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}$, необходимо найти собственные значения λ этих матриц:

$$\left|\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}} - \lambda\mathbf{1}\right| = \begin{vmatrix} z-\lambda & m & m \\ m & z-\lambda & m \\ m & m & z-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где $\mathbf{1}$ – квадратная единичная матрица, размерность которой равна размерности матрицы $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{Y}}$,

или

$$(z-\lambda)^3 + 2m^3 - 3m^2(z-\lambda) = 0. \qquad (11.13)$$

Из (11.13) определим собственные значения (аналогично можно получить для матрицы $\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Z}}$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= z - m; \\ \lambda_0 &= z + 2m. \end{aligned} \qquad (11.14)$$

Найдем собственные векторы матрицы, используя определение собственного вектора

$$|\,\mathbf{ZY} - \lambda_i\mathbf{1}\,|\,\mathbf{K}_i = 0, \qquad (11.15)$$

где $\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \\ K_{3i} \end{bmatrix}$ – собственный вектор.

Подставим $\lambda_1 = \lambda_2 = z - m$ в (11.15):

$$\begin{vmatrix} z-(z-m) & m & m \\ m & z-(z-m) & m \\ m & m & z-(z-m) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.16)$$

Упростим (11.16):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.17)$$

Решением (11.17) могут быть любые $K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{22}$ и K_{23} удовлетворяющие равенствам

$$K_{11} + K_{12} + K_{13} = 0;$$
$$K_{21} + K_{22} + K_{23} = 0.$$

Аналогично подставив $\lambda_0 = z + 2m$ в (11.16), получим:

$$\begin{vmatrix} z-(z+2m) & m & m \\ m & z-(z+2m) & m \\ m & m & z-(z+2m) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{01} \\ K_{02} \\ K_{03} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.18)$$

Упростим (11.18):

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{01} \\ K_{02} \\ K_{03} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.19)$$

Система уравнений (11.19) имеет бесконечное множество решений: $K_{01} = K_{02} = K_{03} = k$, где k – произвольное число.

Поскольку k можно выбрать любым, то для удобства расчетов примем k=1. Собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_0, обозначают индексом «0», учитывая, что он обычно используется в расчете составляющих нулевой последовательности или нулевого канала. Для других каналов используются индексы «1» и «2», поскольку их используют для расчета прямой и обратной последовательности или для расчета воздушных каналов.

Пример 11.1 *Найти собственные значения и собственные векторы матрицы*

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 7 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения λ находятся из следующего выражения:

$$\left|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{1}\right|=0, \tag{11.20}$$

где **1** – квадратная единичная матрица, размерность которой равна размерности матрицы **M**.

Перепишем (11.20):

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 7-\lambda & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix}=(7-\lambda)^3+6-(7-\lambda)-6(7-\lambda)=$$

$$=(7-\lambda)^3-7(7-\lambda)+6=0.$$

Решая полученное равенство, определим:

$\lambda_1=5;$

$\lambda_2=6;$

$\lambda_3=10.$

Найдем собственные векторы матрицы **M**, используя определение собственного вектора:

$$\left|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{1}\right|\mathbf{K}_i=0, \tag{11.21}$$

где $\mathbf{K}_i=\begin{bmatrix} K_{i1} \\ K_{i2} \\ K_{i3} \end{bmatrix}$ – собственный вектор.

Подставим в (11.21) собственное значение $\lambda_1=5$:

$$\begin{vmatrix} 7-5 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 7-5 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 7-5 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix}=0. \tag{11.22}$$

Решим данную систему уравнений с помощью метода Гаусса. В (11.22) умножим первую строку на $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и сложим со второй

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = 0 \qquad (11.23)$$

и умножим первую строку на $-\frac{1}{2}$ и сложим с третьей

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.24)$$

После чего умножим вторую строку на $-\sqrt{3}$ и сложим с третьей

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.25)$$

Система уравнений (11.25) имеет бесконечное множество решений: $K_{12} = -\sqrt{3}K_{13}$ и $K_{11} = \frac{3K_{13} - 1}{2}$. Пусть $K_{13} = 1$. Тогда $K_{12} = -\sqrt{3}$, а $K_{11} = 1$.

Таким, образом, собственный вектор $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Аналогично получим собственный вектор для $\lambda_2 = 6$, подставив его в (11.21):

$$\begin{vmatrix} 7-6 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 7-6 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 7-6 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.26)$$

В (11.26) из третьей строки вычтем первую

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.27)$$

и умножим первую строку на $-\sqrt{3}$ и сложим с третьей

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{22} \\ K_{23} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.28)$$

Система уравнений (11.28) имеет бесконечное множество решений: $K_{22} = 0$ и $K_{21} = -K_{23}$. Пусть $K_{23} = -1$, тогда $K_{21} = 1$.

Тогда собственный вектор $\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Для собственного числа $\lambda_3 = 10$:

$$\begin{vmatrix} 7-10 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 7-10 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 7-10 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \\ K_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \\ K_{33} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.29)$$

В (11.29) вторую строку умножаем на $\sqrt{3}$ и складываем с первой:

$$\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 4 \\ 1 & \sqrt{3} & -3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \\ K_{33} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.30)$$

и умножим третью строку на 3 и сложим с первой

$$\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 4 \\ 0 & 4\sqrt{3} & -8 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \\ K_{33} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.31)$$

Умножим вторую строку на 2 и сложим с третьей

$$\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{31} \\ K_{32} \\ K_{33} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.32)$$

Система уравнений (11.32) имеет бесконечное множество решений: $K_{32} = \frac{2}{\sqrt{3}} K_{33}$ и $K_{31} = K_{33}$. Пусть $K_{33} = 1$. Тогда $K_{32} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $K_{31} = 1$.

Тогда собственный вектор $\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{bmatrix}$.

11.3 Сравнение существующих модальных преобразований

Хотя решения (11.17) и (11.19) имеют бесчисленное множество решений, но все они могут быть получены из

– преобразования Кларк

$$\mathbf{T}_C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

– преобразования Карренбауэра

$$\mathbf{T}_K = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

– преобразования Ведпола

$$\mathbf{T}_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что и между известными преобразованиями существует линейная связь.

11.3.1 Связь преобразования Кларк и преобразования Ведпола

Запишем правило перехода от преобразования Ведпола к преобразованию Кларк

$$\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_{WC}\mathbf{T}_W,$$

и наоборот

$$\mathbf{T}_W = \mathbf{T}_{CW}\mathbf{T}_C.$$

Матрица перехода от преобразования Ведпола к преобразованию Кларк

$$\mathbf{T}_{WC} = \mathbf{T}_C \mathbf{T}_W^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрица перехода от преобразования Кларк к преобразованию Ведпола

$$\mathbf{T}_{CW} = \mathbf{T}_{WC}^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрицы связи преобразований Кларк и Ведпола имеют диагональный вид, то можно сделать вывод, что они подобны, поскольку достаточно использовать линейный коэффициент для волнового канала для перехода к другому преобразованию

Таким образом, преобразования Кларк и Ведпола линейно взаимосвязаны.

11.3.2 Связь преобразования Кларк и преобразования Карренбауэра

Запишем правило перехода от преобразования Карренбауэра к преобразованию Кларк

$$\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_{KC} \mathbf{T}_K,$$

и наоборот

$$\mathbf{T}_K = \mathbf{T}_{CK} \mathbf{T}_C.$$

Матрица перехода от преобразования Карренбауэра к преобразованию Кларк

$$\mathbf{T}_{KC} = \mathbf{T}_C \mathbf{T}_K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрица перехода от преобразования Кларк к преобразованию

Карренбауэра

$$\mathbf{T}_{CK} = \mathbf{T}_{KC}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, чтобы получить из преобразования Кларк преобразование Карренбауэра необходимо использовать линейную комбинацию воздушных каналов.

11.3.3 Связь преобразования Ведпола и преобразования Карренбауэра

Запишем правило перехода от преобразования Карренбауэра к преобразованию Ведпола

$$\mathbf{T}_W = \mathbf{T}_{KW}\mathbf{T}_K,$$

и наоборот

$$\mathbf{T}_K = \mathbf{T}_{WK}\mathbf{T}_W.$$

Матрица перехода от преобразования Карренбауэра к преобразованию Ведпола

$$\mathbf{T}_{KW} = \mathbf{T}_W\mathbf{T}_K^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрица перехода от преобразования Ведепола к преобразованию Карренбауэра

$$\mathbf{T}_{WK} = \mathbf{T}_{KW}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, аналогично преобразованию Кларк, чтобы получить из преобразования Ведпола преобразование Карренбауэра необходимо использовать линейную комбинацию воздушных каналов.

Модальное преобразование позволяет разделить воздушную и земляную моды, существующие в фазном канале. Преобразования Кларк, Карренбауэра и Ведпола следуют из модального преобразования для полностью транспонированных симметричных линий. В связи с тем, что все они линейно связаны друг с другом, характеристики волн в волновых каналах, сформированных на основе этих преобразований, идентичны.

Пример 11.2 *Используя преобразование Кларк, определите волны напряжения в волновых каналах. Известны величины волн напряжения в фазах:* $u_A = 0\ кВ$, $u_B = -100\ кВ$, $u_C = 100\ кВ$.

Из выражения (11.7) с использованием матрицы преобразования Кларк определим волны напряжения в каналах:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{bmatrix} = T_c \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -115,5 \\ 0 \end{bmatrix}, кВ$$

Пример 11.3 *Используя преобразование Кларк, определите волны тока в фазах. Известны величины составляющих волновых каналов:* $i_\alpha = 200\ A$, $i_\beta = -50\ A$, $i_0 = 100\ A$.

Из выражения (11.8) с использованием обратной матрицы преобразования Кларк определим токи в фазах:

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = T_c^{-1} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 200 \\ -50 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 \\ -50 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -43,3 \\ 43,3 \end{bmatrix}, A$$

Заключение

Авторы настоящего учебного пособия стремились донести до читателя основные идеи теории интеллектуальных электрических систем, не перегружая материал детальным обоснованием применимости излагаемых методов. При этом полагалось, что заинтересованный читатель может обратиться за более подробным изложением того или иного метода к источникам, приведенным в списке литературы.

Понятие о системных функциях, как показывает общение со многими специалистами, является базовым инструментом в анализе электрических систем. В то же время использование системных функций во многом носит формальный характер, в результате чего неискушенный исследователь часто попадает в разного рода ловушки. Кроме того, всегда есть искушение превратить удобный инструмент исследования, каковым является передаточная функция, в магическое средство решения всех задач, не утруждая себя изучением конкретных свойств самой задачи и вытекающих из них особенностей применения теории системных функций. Иначе чем объяснить ошибки достаточно опытных исследователей, допущенные, казалось бы, в простых ситуациях применения системных функций при анализе и синтезе электрических систем. В связи с этим авторы надеются, что введенное в учебном пособии понятие обобщенной частотной характеристики будет способствовать более полному пониманию связи между передаточной функцией и частотной характеристикой системы в стационарных и нестационарных условиях работы электрической системы.

Содержание учебного пособия выражает, естественно, взгляд авторов на изложение теории интеллектуальных электрических систем для студентов электротехнического профиля. Авторы далеки от мысли, что принятый подход исключителен, в связи с этим будут рады конструктивным предложениям по улучшению данного учебного пособия.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А*. Основы теории автоматического управления: в 3 – т. / А.А. Воронов. – М.: Энергия. – Т. 1. – 1980.– 312 с; Т. 2.– 1981. – 304 с.

2. *Иванов В.А.* Математические основы теории автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высш. школа, 1977. – 808 с.

3. *Петровский И.Г*. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский; под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

4. *Сиберт У.М*. Цепи, сигналы, системы. В 2 ч. / У.М. Сиберт; пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 360 с.

5. *Араманович И.Г*. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

6. *Корн Г.А*. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г.А. Корн, Т.М. Корн; пер. со 2-го амер. перераб. изд. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – 4-е изд. – М.: Наука, 1978. – 831 с.

7. *Шипилло В.П*. Операторно-рекуррентный анализ электрическихцепей и систем / В.П. Шипилло. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 312 с.

8. *Деч Г*. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *Z*-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

9. *Диткин В.А*. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высш. шк., 1986. – 406 с.

10. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – СПб.: Изд-во "Лань", 2010. – 608 с.

11. *М.В. Костенко, Л.С. Перельман, Ю.П. Шкарин* Волновые процессы и электирческие помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. М., «Энергия», 1973.

12. *X Z Dong, Z Q Bo, M A Redfern, J Fang,* “The

Application of the Wavelet Transform of Travelling Wave Phenomena for Transient Based Protection", IPST2003, International Conference on Power System Transients, Hong Kong, November 2003.

13. *X. Dong, W. Kong, and T. Cui.* Fault Classification and Faulted Phase Selection Based on the Initial Current Traveling Wave. IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 24, no. 2, pp. 552-559, April 2009.

14. *A. Ametani, N. Nagaoka, Y. Baba and T. Ohno,* Power System Transients – Theory and Applications. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2013.

15. Das, J. C. Understanding Symmetrical Components For Power System Modeling // New Jersey: Wiley, 2017. – 89 p.

16. *П. Бикфорд, Н. Мюлине, Дж. Рид.* Основы теории перенапряжений в электрических сетях. Перевод с английского В.В. Базуткина. М., Энергоиздат, 1981.

17. *Шалыт Г.М.* Определение мест повреждения в электрических сетях. – М.: Энергоиздат, 1982. – 312 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ 5

1.1 Линейная система 5
1.2 Динамические уравнения элементов электрических систем.. 6
1.3 Активные элементы четырехполюсников: операционные усилители 8
1.4 Понятие обратной связи 9
1.5 Дифференциальное уравнение типа "вход-выход" для четырехполюсника 11
1.6 Составление уравнений типа "вход-выход" для четырехполюсников 11
1.6.1 Использование законов Кирхгофа 11
1.6.2 Метод узловых потенциалов 12
1.6.3 Метод переменных состояния 14
1.7 Решение дифференциального уравнения типа "вход-выход"…..... 15
1.7.1 Общее решение однородного уравнения (свободное движение системы) 16
1.7.2 Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (принужденный режим системы) 19
1.8 Определение реакции четырехполюсника классическим методом 20
1.8.1 Предшествующий и послекоммутационный режимы 20
1.8.2 Законы коммутации 21
1.8.3 Обобщенные законы коммутации 22
1.8.4 Начальные условия определение постоянных интегрирования 23
1.8.5 Определение реакции четырехполюсника на входное воздействие 24
1.9 Решение уравнений многомерных систем (системы со многими выходами) 27
1.9.1 Решение однородной системы (свободный режим).... 28
1.9.2 Определение частного решения неоднородной системы

(принужденный режим) 33

Глава 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ 35

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ 35
2.2 Устойчивость тривиального решения 36
2.3 Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами 37
2.4 Положение корней характеристического уравнения устойчивой системы на комплексной плоскости 39
2.5 Необходимое условие отрицательности действительных частей всех корней характеристического многочлена 40
2.6 Критерии устойчивости 42
2.6.1 Критерий Гурвица 42
2.6.2 Критерий Михайлова 45

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО 51

3.1 Комплексные числа и действия над ними 51
3.1.1 Определение комплексного числа 51
3.1.2 Свойства комплексных чисел 52
3.2 Последовательность комплексных чисел. Множества 55
3.3 Функции комплексного переменного 57
3.4 Предел ФКП 58
3.5 Непрерывность функций 59
3.6 Производная ФКП 60
3.7 Аналитичность функции комплексного переменного 61
3.8 Интеграл функции комплексного переменного 62
3.9 Интегральная теорема Коши 63
3.10 Формула Коши 64
3.11 Разложение аналитических функций в ряд 65
3.11.1 Ряд Тейлора 65
3.11.2 Ряды Лорана 66
3.12 Нули и особые точки 67
3.13 Понятие о вычете 68

3.14 Теорема о вычетах 69
3.15 Вычет относительно полюса 69

Глава 4. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ 71

4.1 Преобразование Лапласа 71
4.1.1 Свойства преобразования Лапласа 72
4.2 Определение оригинала по изображению 76
4.2.1 Теорема обращения(обратное преобразование Лапласа) 76
4.2.2 Формулы разложения 76
4.2.3 Использование таблиц изображений 79
4.3 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом Лапласа 80

Глава 5. СИСТЕМНЫЕ ФУНКЦИИ 83

5.1 Передаточная функция 83
5.2 Амплитудно-фазовая частотная характеристика 83
5.3 Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики ... 84
5.4 Экспоненциальная характеристика 84
5.5 Обобщённая частотная характеристика 85
5.6 Определение реакции цепи с помощью передаточной функции 85
5.7 Переходная и импульсная характеристики 86
5.8 Определение передаточной функции замкнутой системы ... 89

Глава 6. КРИТЕРИИ НАЙКВИСТА 90

6.1 Критерии устойчивости Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии 90
6.2 Критерий устойчивости Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии 94
6.3 Обобщение критерия Найквиста на случай астатических систем 96
6.4 Запасы устойчивости по фазе и модулю 97

Глава 7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 100

7.1 Представление произвольного сигнала по заданной системе функций 100
7.2 Спектральные представления непрерывных сигналов 102
7.2.1 Спектр периодических сигналов 102
7.2.2 Спектр непериодического сигнала 105
7.3 Некоторые важные свойства ряда Фурье 106

Глава 8. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ... 108

8.1 Эквивалентные характеристик нелинейных элементов 108
8.1.1 Линеаризация с помощью ряда Тейлора 108
8.1.2 Метод гармонической линеаризации 110
8.2 Определение частоты автоколебаний нелинейной замкнутой системы с помощью метода гармонической линеаризации 113
8.3 Определение устойчивости автоколебаний 114

Глава 9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ 117

9.1 Решётчатые функции 117
9.2 Конечные разности 118
9.3 Разностные уравнения 119
9.4 Классический метод решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами 120
9.5 Дискретное преобразование Лапласа 123
9.6 Область аналитичности изображения 125
9.7 Формула обращения 126
9.8 Периодичность изображения 126
9.9 Z-преобразование и его связь с D-преобразованием 127
9.10 Формула обращения Z-преобразования 129
9.11 Свойства D- и Z-преобразований 130
9.12 Решение разностных уравнений с помощью Z-преобразования 134
9.13 Определение передаточной функции по разностному уравнению 135

9.14 Частотные характеристики 135

Глава 10. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ 137

10.1 Импульсный элемент 137
10.2 Приведение импульсного элемента к простейшей форме .138
10.3 Приведённая непрерывная часть..... 140
10.4 Весовая функция импульсной системы..... 141
10.5 Алгебра Z-преобразования 143
10.6 Определение реакции импульсной системы..... 144
10.7 Определение выходного сигнала между дискретами 145
10.8 Учёт чистого запаздывания 146
10.9 Исследование устойчивости импульсных систем 147

Глава 11. МОДАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН..... 149

11.1 Несимметричная линия 149
11.2 Симметричная и полностью транспонированная линия... 153
11.3 Сравнение существующих модальных преобразований... 159
11.3.1 Связь преобразования Кларк и преобразования Ведпола 159
11.3.2 Связь преобразования Кларк и преобразования Карренбауэра 160
11.3.3 Связь преобразования Ведпола и преобразования Карренбауэра 161
Заключение..... 163
Список рекомендуемой литературы 164

АНТОНОВ Владислав Иванович
ЛАЗАРЕВА Надежда Михайловна
ИЛЬИН Алексей Анатольевич
ПЕТРОВ Владимир Сергеевич
НАУМОВ Владимир Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор М.В. Яковлева

Подписано в печать ****.11. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Times. Печать оперативная.
Усл. печ. л. ****. Уч.-изд. л. ****. Тираж *** экз. Заказ № ***.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15